

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОГО
МНОЖЕСТВА И ДОСТАТОЧНЫЕ
УСЛОВИЯ k -ОБНАРУЖЕНИЯ В ИГРЕ
ПРОСТОГО ПОИСКА НА ПЛОСКОСТИ
С. В. Местников, Н. В. Петров

Аннотация. Рассматривается антагонистическая дифференциальная игра простого поиска на плоскости в случае, когда ищущий движется только по прямой. С помощью вспомогательной игры с группой ищущих игроков дается оценка вероятности обнаружения прячущегося игрока. Приводятся примеры построения информационных множеств для рассмотренных игр на разработанной компьютерной программе.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9243

Ключевые слова: дифференциальная игра поиска, информационные множества, смешанные стратегии.

В настоящей работе рассматривается антагонистическая дифференциальная игра поиска [1–3] со стороны ищущего. Работа примыкает к работам [4–10], в которых исследовались свойства и проблемы аппроксимации информационных множеств для различных классов конкретных дифференциальных игр поиска и со стороны ищущего игрока, и со стороны прячущегося игрока.

Определение, построение и аппроксимация информационных множеств о состоянии игроков в настоящее время является одной из важных задач теории дифференциальных игр, исследованию которой посвящены работы многих авторов (см. ссылки в [11]).

1. Постановка задачи

Пусть уравнения движения игроков P и E , где P — ищущий игрок, а E — прячущийся игрок, описывается системой дифференциальных уравнений:

$$P: \quad \dot{x} = u, \quad \|u\| \leq \alpha, \quad x(0) = x_0, \quad \|x_0\| = r + l, \quad x, u \in R^2, \quad (1)$$

$$E: \quad \dot{y} = v, \quad \|v\| \leq \beta, \quad y(0) = y_0, \quad \|y_0\| \leq r, \quad \beta \leq \alpha, \quad y, v \in R, \quad (2)$$

где x_0 — местоположение ищущего игрока P в момент времени $t_0 = 0$, y_0 — местоположение прячущегося игрока E в момент времени $t_0 = 0$, α , β , r , l — параметры игры.

Допустимые управления $u = u(t)$, $t \geq 0$, игрока P — кусочно постоянные функции. Множество всех допустимых управлений игрока P обозначим через D_P . Под *чистой стратегией* a игрока P будем понимать пару $a = (x_0, u(\cdot))$, где точка $x_0 \in R^2$ удовлетворяет условию (1).

Допустимые управления $v = v(t)$, $t \geq 0$, игрока E — кусочно непрерывные функции. Множество всех допустимых управлений игрока E обозначим через D_E . Под *чистой стратегией* b игрока E будем понимать пару $b = (y_0, v(\cdot))$, где $y_0 \in R^2$ удовлетворяет условию (2). Игра рассматривается в программных стратегиях [1–3].

Состояние информации в игре следующее. В начальный момент времени $t = t_0$ игрок P (E) обладает лишь априорной информацией о другом игроке, т. е. ему известны $\|y_0\| \leq r$ ($\|x_0\| = r + l$) и динамика игры (1), (2). В дальнейшем ходе игры игроки не получают текущей информации о местоположении противника.

Игра происходит следующим образом: игрок E выбирает некоторую точку y_0 из круга радиуса r и допустимые управления $v(\cdot)$. Игрок P , не зная стратегию игрока E , выбирает стратегию $a = (x_0, u(\cdot))$.

Игрок E считается обнаруженным (пойманным) в момент времени t , если расстояние между $x(t)$ и $y(t)$ меньше или равно l , где l — заданное положительное число.

Предположим, что для каждого состояния $x \in R^2$ определено множество $S(x) \subset R^2$ — замкнутый круг радиуса l с центром в точке x , которое в дальнейшем будем называть *областью обнаружения* игрока P .

На состояниях $x(t)$ и $y(t)$ введем функцию $F_1(x(t), y(t))$ игрока P следующим образом:

$$F_1(x(t), y(t)) = \begin{cases} 1, & \text{если } y(t) \in S(x(t)), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что в момент времени $t \in [t_0, T]$ произошло обнаружение игрока E ищущим игроком, если $F_1(x(t), y(t)) = 1$.

Используя функцию (3), на траекториях

$$x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, u), \quad y(\cdot) = y(\cdot, t_0, y_0, v)$$

игроков определим следующие функционалы:

$$F_2(x(\cdot), y(\cdot)) = \max_{t \in [t_0, T]} F_1(x(t), y(t)),$$

$$F_2^\tau(x(\cdot), y(\cdot)) = \max_{t \in [t_0, \tau]} F_1(x(t), y(t)), \quad \tau \leq T.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что игрок P при движении вдоль траектории $x(\cdot)$ обнаруживает игрока E (движущегося вдоль траектории $y(\cdot)$), если $F_2(x(\cdot), y(\cdot)) = 1$.

Функцию выигрыша $K((x_0, u(\cdot)), (y_0, v(\cdot)))$ игрока P в ситуации $((x_0, u(\cdot)), (y_0, v(\cdot)))$ определим по правилу

$$K((x_0, u(\cdot)), (y_0, v(\cdot))) = F_2(x(\cdot, t_0, x_0, u), y(\cdot, t_0, y_0, v)).$$

Поскольку рассматриваемые игры антагонистические, функция выигрыша игрока E равна функции выигрыша игрока P с обратным знаком.

Таким образом, мы определили антагонистическую игру

$$\Gamma = \langle A, B, K \rangle$$

в нормальной форме в классе чистых стратегий, A (B) — множество всех чистых стратегий игрока P (E).

Игру поиска будем рассматривать в классе смешанных стратегий [1–3]. Под *смешанной стратегией* μ (ν) игрока P (E) будем понимать конечную смесь

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \quad (\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)),$$

заданную на конечном подмножестве $\{a_1, \dots, a_k\} \subset A$ ($\{b_1, \dots, b_m\} \subset B$), где

$$\mu_i = 1/k, \quad i = 1, \dots, k \quad (\nu_i = 1/m, \quad i = 1, \dots, m).$$

Тогда выигрыш $M(\mu, b)$ ($M(a, \nu)$), где μ (ν) — смешанная стратегия, заданная на множестве $\{a_1, \dots, a_k\} \subset A$ ($\{b_1, \dots, b_m\} \subset B$), определяется следующим образом:

$$M(\mu, b) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k F_2(x_i(\cdot), y(\cdot)), \quad M(a, \nu) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m F_2(x(\cdot), y_i(\cdot)), \quad (4)$$

где $x_i(\cdot)$, ($y_i(\cdot)$) — траектория движения игрока P (E), порожденная стратегией a_i (b_i).

Стоит отметить, что выигрыш $M(\mu, b)$ ($M(a, \nu)$) игрока P имеет смысл вероятности обнаружения игрока E в ситуации (μ, b) ((a, ν)) в смешанных стратегиях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что *смешанная стратегия μ игрока P гарантирует вероятность обнаружения, не меньшую чем $\mathcal{V}$* , если $M(\mu, b) \geq \mathcal{V}$ для любого $b \in B$, $0 \leq \mathcal{V} \leq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что *смешанная стратегия ν игрока E гарантирует вероятность обнаружения, не большую чем $\mathcal{V}$* , если $M(a, \nu) \leq \mathcal{V}$ для любого $a \in A$, $0 \leq \mathcal{V} \leq 1$.

Стратегию игрока P (E) будем называть *гарантирующей*, если она гарантирует ему вероятность обнаружения, равную 1 (0).

Далее выясним, какую вероятность обнаружения может гарантировать себе игрок P в классе смешанных стратегий при отсутствии гарантирующих стратегий. В настоящей работе игра поиска рассматривается со стороны ищущего игрока P .

2. Дифференциальная игра поиска в случае, когда ищущий игрок P движется только по прямым

Предположим, что ищущий игрок P , в начальный момент времени $t_0 = 0$ находясь в точке x_0 , выбирает постоянное управление и в дальнейшем ходе

игры не имеет возможности его изменить. Таким образом, у него реализуется траектория $a = (x_0, u(\cdot))$, где $u(\cdot) = \text{const}$, которая на плоскости представляется в виде прямой.

Рассмотрим игру поиска с одним ищущим игроком P и убегающим игроком E . Представим данную игру на плоскости. Для этого проведем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы точка начального расположения x_0 игрока P лежала на оси Ox , а центр области начального расположения игрока E — круга радиуса r с центром в точке y_0 — совпадал с началом координат. Расстояние между точками x_0 и y_0 равно $r + l$ (рис. 1).

Для гарантированного обнаружения (поймки) прячущегося игрока E одним ищущим игроком P в случае, когда $\beta = 0$, достаточно выполнение неравенства $r \leq l$ (рис. 2).

В случае, когда $\beta > 0$:

$$r + \frac{\beta(r+l)}{\alpha} \leq l. \quad (5)$$

В этом случае ищущий игрок P движется к центру области начального расположения игрока E . В момент времени $t = (r+l)/\alpha$ он попадает в этот центр. При этом круг обнаружения ищущего игрока P полностью покрывает множество достижимости игрока E из начального множества неопределенности, являющееся кругом радиуса $r + \beta t$, при выполнении неравенства (5) (рис. 3).

В этом случае описанная выше стратегия ищущего игрока является гарантирующей обнаружение.

3. Вспомогательная игра поиска с нарядом ищущих игроков. Основные понятия

Предположим что неравенство (5) не выполняется, т. е. $r + \beta(r+l)/\alpha > l$. Это означает, что один ищущий игрок P , двигаясь по прямолинейной траектории, не сможет гарантированно обнаружить прячущегося игрока E .

Рассмотрим вспомогательную игру $\Gamma(k, 1)$ между прячущимся игроком E и нарядом ищущих игроков $\bar{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$, действующих согласованно как один игрок под воздействием системы (1).

В начальный момент игрок E и каждый из наряда ищущих игроков $\bar{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ выбирают начальные местоположения $y_0 \in Y_0$, $x_0^i \in X_0$, $i = 1, \dots, k$, и допустимые управления $v(\cdot)$, $u_i(\cdot)$ $i = 1, \dots, k$. Начальное множество неопределенности Y_0 игрока E — круг радиуса r с центром в начале координат, множество X_0 — окружность радиуса $r + l$ с центром в начале координат. Тогда у ищущих игроков $\bar{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ и у прячущегося игрока E реализуются траектории $x_i(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0^i, u_i)$, $i = 1, \dots, k$, и $y(\cdot) = y(\cdot, t_0, y_0, v)$ соответственно. Если начальное местоположение ищущих игроков одинаково: $x_0^i = x_0$, $i = 1, \dots, k$, то вспомогательную игру будем называть *игрой с фиксированным начальным местоположением игроков*.

На состояниях $x(t), \dots, x_k(t)$ и $y(t)$ введем функцию $F_3(x_1(t), \dots, x_k(t), y(t))$

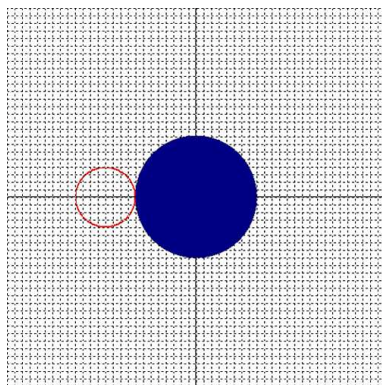
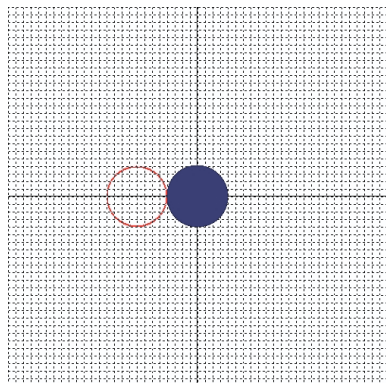
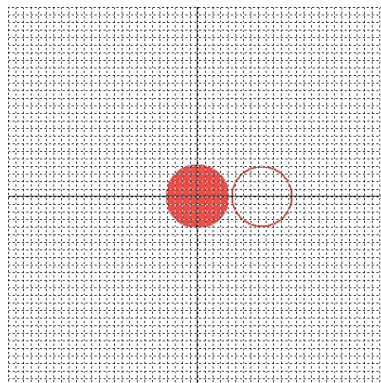
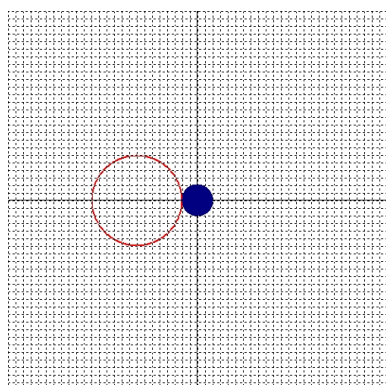


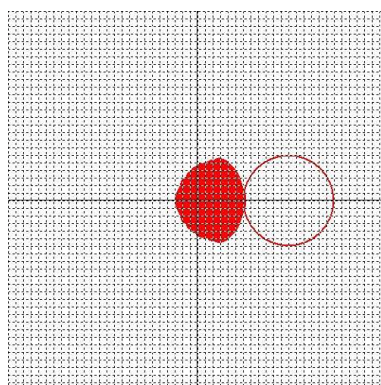
Рис. 1. Начальное местоположение игроков



а) перед началом игры

б) после поимки, где $l = r$ Рис. 2. Игра поиска с одним ищущим игроком при $\beta = 0$ 

а) перед началом игры

б) после поимки, где $r + \frac{\beta(r+l)}{\alpha} = l$ Рис. 3. Игра поиска с одним ищущим игроком при $\beta > 0$

следующим образом:

$$F_3(x_1(t), \dots, x_k(t), y(t)) = \sum_{i=1}^k F_2(x_i(t), y(t)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что в момент времени $t \in [t_0, T]$ произошло k_* -обнаружение, если $k_*, k_* \leq k$, ищущих игроков обнаружили прячущегося игрока E , т. е. $F_3(x_1(t), \dots, x_k(t), y(t)) = k_*$.

На траекториях $x_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, k$, и $y(\cdot)$ игроков определим следующие функционалы:

$$F_4(x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot), y(\cdot)) = \sum_{i=1}^k F_2(x_i(\cdot), y(\cdot)),$$

$$F_4^T(x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot), y(\cdot)) = \sum_{i=1}^k F_2^T(x_i(\cdot), y(\cdot)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что при движении наряда $\bar{P}$ вдоль траекторий $x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot)$ происходит k_* -обнаружение игрока E (движущегося вдоль траектории $y(\cdot)$), если

$$F_4(x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot), y(\cdot)) = k_*.$$

Последнее условие означает, что из наряда игроков $\bar{P}$, двигающихся вдоль траекторий $x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot)$, k_* ищущих игроков обнаруживают убегающего игрока E , движущегося по траектории $y(\cdot)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Стратегия $\bar{a} = ((x_0^1, u_1(\cdot)), \dots, (x_0^k, u_k(\cdot)))$ наряда $\bar{P}$ называется гарантирующей k_* -обнаружение ($1 \leq k_* \leq k$), если

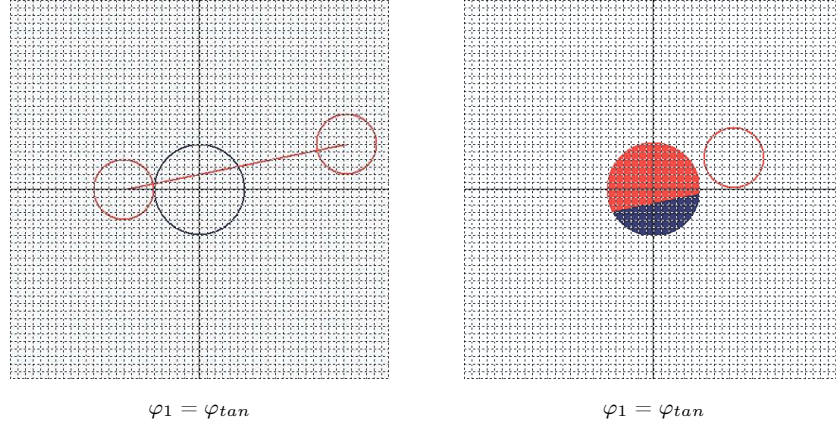
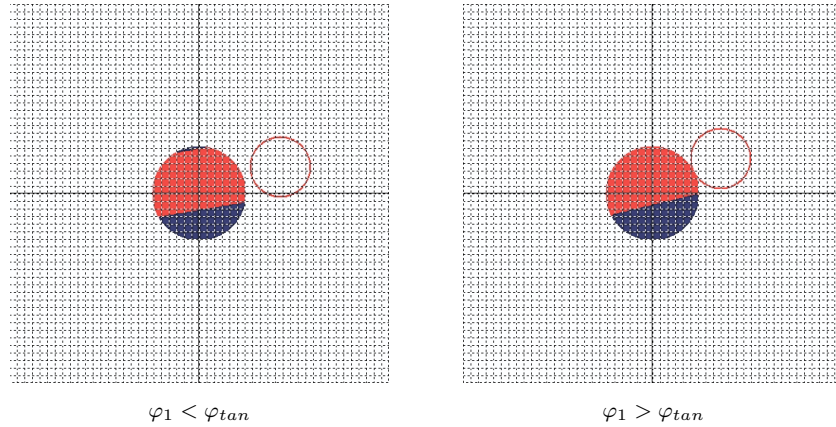
$$F_4(x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot), y(\cdot)) \geq k_*$$

для любой стратегии $b = (y_0, v(\cdot))$ игрока E , где

$$x_i(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0^i, u_i), \quad i = 1, \dots, k, \quad y(\cdot) = y(\cdot, t_0, y_0, v).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Информационным множеством $\Omega^{k,k_*}(t)$ назовем такое множество, в котором может находиться убегающий игрок E , будучи необнаруженным k_* ищущими игроками из наряда k игроков.

Если информационное множество $\Omega^{k,k_*}(t)$ является пустым для вспомогательной игры с нарядом ищущих игроков $\bar{P}$, то существует смешанная стратегия игрока P , гарантирующая вероятность обнаружения $\mathcal{V} \geq k_*/k$ [5–7]. Если $k_* = k$, то множество $\Omega^{k,k}(t)$ будем обозначать через $\Omega(t)$. Для конкретных игр, когда k и k_* фиксированы, информационное множество $\Omega^{k,k_*}(t)$ будем называть также областью неопределенности.

Рис. 4. Стратегия где $\varphi_1 = \varphi_{tan}$ Рис. 5. Покрывтие области неопределенности, когда $\varphi_1 \neq \varphi_{tan}$

Для визуального отображения информационного множества $\Omega^{k,k*}(t)$ красным (red) цветом раскрасим область, которую исследовал первый ищущий игрок P_1 , зеленым (green) — второй P_2 , и синим (blue) — третий P_3 в случае, когда $k = 3$.

По аналогии с цветовой моделью RGB области, которые исследовали первый и второй ищущие игроки, будут отображаться желтым (yellow), второй и третий — голубым (cyan), первый и третий — пурпурным (magenta) цветом. Область, попавшая одновременно в три круга обнаружения, будет отображаться серым (grey) цветом.

3.1. Вспомогательная игра поиска с двумя ищущими игроками. Начальное местоположение ищущих игроков фиксировано. Предположим, что $k = 2$ и в игре поиска участвуют два ищущих игрока. Рассмотрим случай, когда в начале игры местоположение ищущих игроков фиксировано и

они оба находятся в точке x_0 . Расстояние между точкой x_0 и центром круга начального расположения игрока E — круга радиуса r — равно $r + l$.

Для начала рассмотрим следующую стратегию первого ищущего игрока P_1 . Игрок P_1 , находясь в точке x_0 , начинает движение под углом $\varphi_1 > 0$ в сторону области начального множества неопределенности убегающего игрока E — круга с радиусом r . Обозначим через t_* момент, когда область обнаружения игрока P_1 полностью входит в множество достижимости игрока E в этот момент. В момент t_* две окружности — область обнаружения $S(x(t_*))$ и множество достижимости игрока E — круг радиуса $r + \beta t_*$ касаются друг друга. Выделим такой угол φ_{tan} , при котором эта общая касательная параллельна направлению движения игрока P_1 . Угол по касательной φ_{tan} определяется по формуле

$$\sin(\varphi_{tan}) \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) = \frac{r - l}{r + l} + \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1 - \frac{(l - r)^2}{(l + r)^2}}. \quad (6)$$

Заметим, что при $\varphi_1 = 0$ игрок P_1 двигается в сторону центра круга неопределенности по прямой $x_0 O$ и при этом $t_* = 2l/(\alpha + \beta)$. При таком движении общая касательная перпендикулярна направлению движения игрока P .

Несложно доказать, что стратегия игрока P_1 , где он будет двигаться по направлению общей касательной между областью обнаружения игрока P_1 и областью достижимости игрока E , доминирует все остальные стратегии, при которых угол $\varphi > \varphi_{tan}$, так как при таком движении покрывается большая часть области неопределенности, чем при любой другой прямолинейной стратегии (рис. 4, 5).

В дальнейшем будем считать, что игрок P_1 выбирает стратегию, где $\varphi_1 = \varphi_{tan}$ определяется по формуле (6).

Игра поиска с двумя ищущими игроками происходит следующим образом. Ищущие игроки P_1, P_2 начинают движение с точки x_0 по траекториям $P_1(t), P_2(t)$, где $t \geq 0$, с постоянной скоростью α , причем $\alpha > \beta$. Будем считать, что $\varphi_1 = -\varphi_2$.

Траектории ищущих игроков $P_1(t), P_2(t)$ описываются следующими уравнениями:

$$P_1(t): \quad \dot{x}_1(t) = \alpha t \cos \varphi_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = \alpha t \sin \varphi_1(t),$$

$$P_2(t): \quad \dot{x}_1(t) = \alpha t \cos \varphi_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = \alpha t \sin \varphi_2(t).$$

Игра $\Gamma(2, 1)$ заканчивается в момент T , если ищущие игроки P_1, P_2 , следуя по выбранным траекториям $P_1(t), P_2(t)$, совершили гарантированную поимку (обнаружение) убегающего игрока E , т. е. полностью исследовали область достижимости прячущегося игрока E и при этом информационное множество $\Omega^{2,1}(T)$ стало пустым.

В противном случае считается, что прячущийся игрок E может, зная траектории $P_1(t), P_2(t)$, избежать обнаружения до момента T .

Условием для обнаружения прячущегося игрока E двумя ищущими игроками будет являться выполнение неравенства

$$\frac{l}{2} \left(\frac{1}{\sin \varphi_1} - \frac{\beta}{\alpha \tan(\varphi_1)} - 1 \right) \geq r. \quad (7)$$

В частном случае, когда $\beta = 0$,

$$\frac{l}{2} \left(\frac{1}{\sin \varphi_1} - 1 \right) \geq r. \quad (8)$$

На рис. 6, 7 зеленым цветом отображено информационное множество, состоящее из точек, которые не смог обнаружить первый ищущий игрок P_1 .

Красным цветом отображено информационное множество, состоящее из точек, которые не смог обнаружить второй ищущий игрок P_2 .

Желтым цветом отображено информационное множество, являющееся подмножеством множества достижимости игрока E , имеющее двойное покрытие, т. е. те точки, которые были обнаружены двумя ищущими игроками.

3.2. Вспомогательная игра поиска с двумя ищущими игроками. Начальное местоположение ищущих игроков произвольно. Покажем, что оценку (7) можно улучшить, если разместить ищущих игроков P_1, P_2 в различные начальные положения. Обозначим начальное местоположение ищущего игрока P_1 через x_0^1 , игрока P_2 — через x_0^2 (рис. 8).

Для начала рассмотрим игру поиска, где $\beta = 0$. В данном случае задача сводится к нахождению условия, при котором каждый ищущий игрок, двигаясь по касательной траектории с углом φ_{tan} , исследовал бы область достижимости прячущегося игрока E , представляющую собой полуокружность радиуса r . Условием для гарантированного обнаружения прячущегося игрока E будет выполнение неравенства

$$r \leq 2l, \quad (9)$$

так как две полосы шириной $2l$ полностью покрывают круг радиуса r начального местоположения прячущегося.

В случае, когда $\beta > 0$,

$$r + \beta(t_1 - t_2 + t_3) \leq 2l, \quad (10)$$

где t_1 — момент времени, в который происходит соприкосновение круга обнаружения ищущего игрока P_1 и круга достижимости прячущегося игрока E , t_2 — момент времени, в который круг обнаружения ищущего игрока P_1 находится внутри круга достижимости игрока E и имеет с кругом достижимости одну общую точку, t_3 — общее время, которое потребуется ищущему игроку P_1 для поимки E :

$$t_1 = \frac{(r + l) \cos \varphi_1}{\alpha}, \quad t_2 = \sqrt{\frac{x_d^2 + y_d^2 - l^2}{\alpha}},$$

$$t_3 = \frac{\sqrt{(x_d - \alpha t_1 \cos \varphi_1)^2 + (y_d - \alpha t_1 \sin \varphi_1)^2 - l^2}}{\alpha},$$

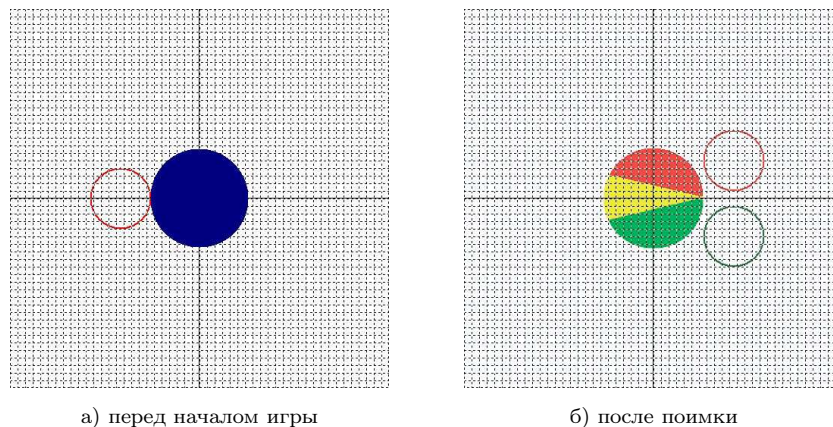
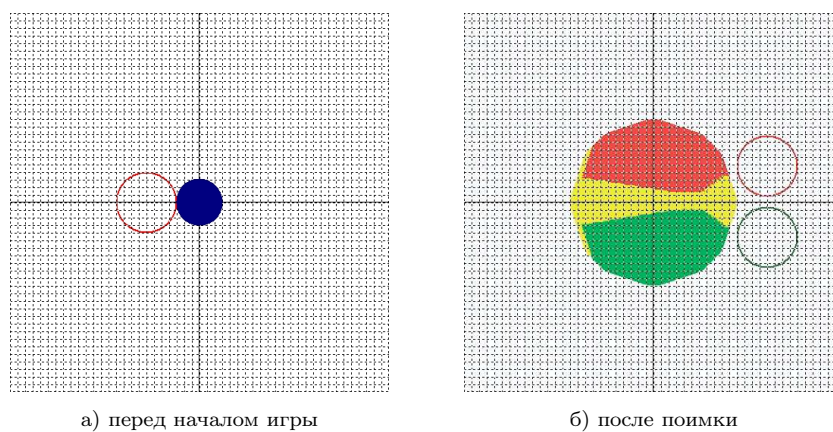
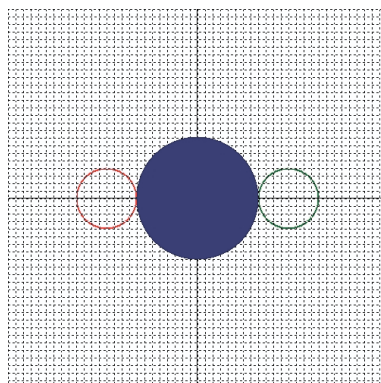
Рис. 6. Игра поиска с двумя ищущими игроками при $\beta > 0$ Рис. 7. Игра поиска с двумя ищущими игроками при $\beta = 0$ 

Рис. 8. Начальное местоположение ищущих игроков

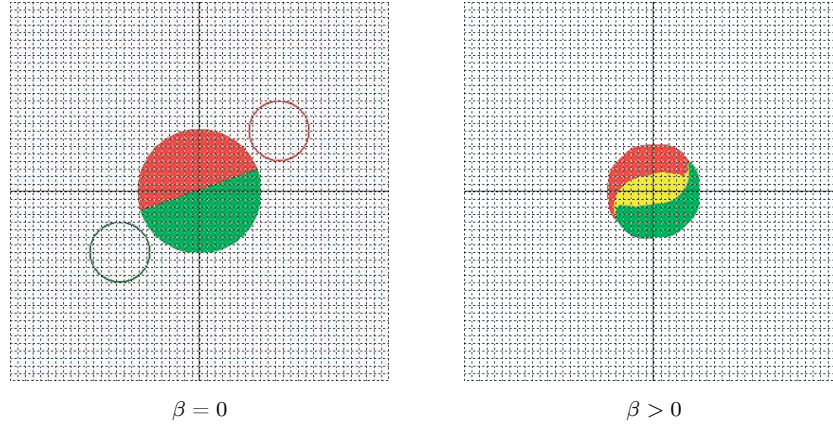
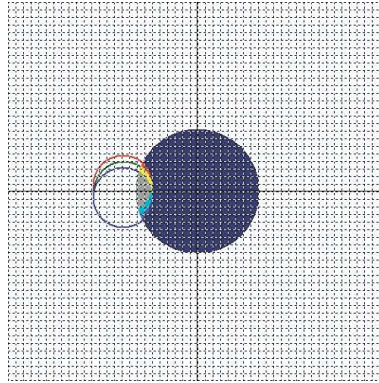


Рис. 9. Игра с двумя ищущими игроками при различных начальных расположениях

Рис. 10. Игра поиска $k = 3$, начальное местоположение ищущих игроков фиксировано

где $(x_d; y_d)$ — координаты точки касания D.

Выполнение неравенства (10) гарантирует обнаружение (поймку) прячущегося игрока E с вероятностью $V \geq 1/2$ для игры поиска подвижного объекта, а выполнение неравенства (9) — для игры поиска неподвижного объекта.

Таким образом, показано, что во вспомогательной игре с двумя ищущими и одним убегающим для гарантированного обнаружения достаточно выполнение условий (7) и (8), если начальное местоположение ищущих фиксировано. Неравенство (7) для подвижного прячущегося игрока, (8) для неподвижного. Условия (9) и (10) найдены для игры, когда начальное местоположение ищущих не фиксировано.

4. Вспомогательная игра поиска с тремя ищущими игроками

Допустим, что вышеприведенные неравенства не выполняются для рассмотренных игр с двумя ищущими и одним убегающим. Будем искать достаточ-

ные условия гарантированного обнаружения для вспомогательной игры с тремя ищущими и одним убегающим и численно строить информационные множества. Рассмотрим случай игры, когда $k = 3$ и наряд ищущих состоит из трех игроков P_1 , P_2 и P_3 .

4.1. Начальное местоположение ищущих игроков фиксировано.

Ищущие игроки P_1 , P_2 и P_3 начинают движение с точки x_0 по траекториям $P_1(t)$, $P_2(t)$ и $P_3(t)$, где $t \geq 0$, с постоянной скоростью α , причем $\alpha > \beta$ (рис. 10).

Траектории ищущих игроков $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} P_1(t): \quad \dot{x}_1(t) &= \alpha t \cos \varphi_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = \alpha t \sin \varphi_1(t); \\ P_2(t): \quad \dot{x}_1(t) &= \alpha t, \quad \dot{x}_2(t) = \alpha t; \\ P_3(t): \quad \dot{x}_1(t) &= \alpha t \cos \varphi_3(t), \quad \dot{x}_2(t) = \alpha t \sin \varphi_3(t). \end{aligned}$$

Будем считать, что $\varphi_1 = -\varphi_3$.

Достаточным условием для гарантированной поимки (обнаружения) в случае, когда $\beta = 0$, будет выполнение неравенства

$$\sqrt{(\alpha t_1 - (r + l) - l \sin(\varphi_1/2))^2 + \cos^2(\varphi_1/2)l^2} \geq r \quad (11),$$

где t_1 — момент времени, в который ищущие игроки P_1 и P_2 , двигаясь по траекториям $P_1(t)$, $P_2(t)$, имеют точку соприкосновения окружностей обнаружения.

В случае, когда $\beta > 0$, достаточным условием гарантированного обнаружения будет выполнение неравенства

$$(\alpha t_1 - (r + l) - l \sin(\varphi_1/2))^2 + \cos^2(\varphi_1/2)l^2 \geq (r + \beta t_1)^2. \quad (12)$$

Выполнение неравенств (11), (12) гарантирует поимку прячущегося игрока E с вероятностью $V \geq 1/3$ [5].

4.2. Начальное расположение ищущих игроков произвольно.

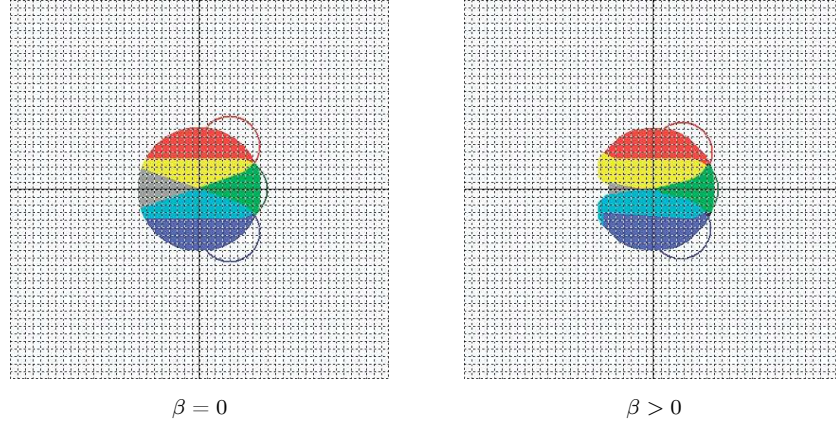
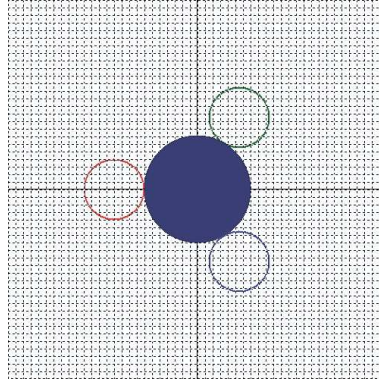
В этом случае аналитические оценки получены для игры поиска неподвижного объекта. Для игры поиска подвижного объекта информационные множества получены только численно с помощью программы.

Рассмотрим случай, когда начальное расположение ищущих игроков P_1 , P_2 , P_3 различно. Обозначим начальное расположение ищущих игроков P_1 , P_2 , P_3 через x_{01} , x_{02} и x_{03} соответственно. В этой игре, когда $\beta = 0$ (поиск неподвижного объекта), если три полосы шириной $2l$ полностью покрывают круг радиуса r начального местоположения прячущегося, т. е. при выполнении условия

$$r \leq 3l, \quad (13)$$

игрок P в основной игре, используя смешанные стратегии (4), гарантирует обнаружение (поимку) прячущегося игрока E с вероятностью $V \geq 1/3$ [5].

С помощью программы раскрасим и покажем характерные области информационного множества, когда начальными местоположениями ищущих игроков

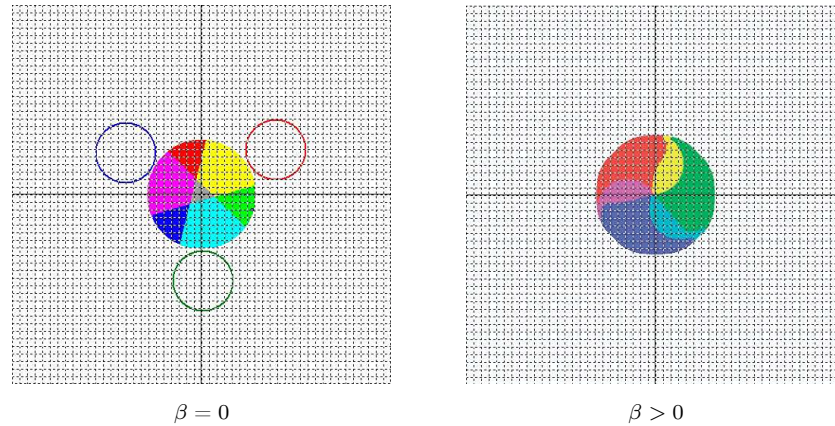
Рис. 11. Покрывание при $k = 3$ и фиксированном расположении ищущих игроковРис. 12. Игра поиска $k = 3$, начальное местоположение ищущих игроков произвольно

при прямолинейной траектории будут точки x_{0_1} с координатами $(0; -(r + l))$, x_{0_2} с координатами $(1/2(r + l); \sin 60^\circ(r + l))$ и x_{0_3} с координатами $(1/2(r + l); -\sin 60^\circ(r + l))$.

Заметим, что при выполнении условия

$$\frac{3}{4}r \leq l \quad (14)$$

ищущий игрок в основной игре, используя смешанные стратегии (4), гарантирует обнаружение (поймку) прячущегося игрока E с вероятностью $V \geq 2/3$. Действительно, в этом случае полоса шириной $2l$ покрывает $2/3$ часть окружности радиуса r , границы круга начального местоположения прячущегося. Это означает, что три полосы шириной $2l$, соответствующие траекториям ищущих, начинающиеся с точек x_0^1 , x_0^2 и x_0^3 соответственно (рис. 12), полностью покрывают начальный круг неопределенности таким образом, что любая точка этого круга попадает хотя бы в две такие полосы.

Рис. 13. Покрытие при $k = 3$ и произвольном расположении ищущих игроков

Покажем два рисунка, где программой разными цветами раскрашиваются области, которые исследовали отдельно первый ищущий игрок P_1 , второй P_2 и третий P_3 ; области, которые исследовали совместно P_1 и P_2 , P_1 и P_3 , P_2 и P_3 ; области, которые совместно исследованы всеми тремя ищущими.

На рис. 13 информационное множество $\Omega^{3,2}(T)$ — это объединение множеств, которые раскрашены красным, зеленым и синим, где T — момент времени, когда ищущие полностью исследовали множество достижимости игрока E . По построению красным (red) цветом раскрашено множество точек, которое исследовано только первым ищущим игроком P_1 , зеленым (green) — только вторым P_2 и синим (blue) — только третьим ищущим P_3 . $\Omega^{3,2}(T)$ — это множество, в котором может находиться убегающий игрок E , будучи необнаруженным двумя ищущими игроками из наряда трех игроков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А. Оптимальный поиск в условиях конфликта. Л.: ЛГУ, 1986.
2. Петросян Л. А., Гарнаев А. Ю. Игры поиска. СПб: СПбГУ, 1992.
3. Зенкевич Н. А., Местников С. В. Динамический поиск подвижного объекта в условиях конфликта // Вопросы механики и процессов управления. 1991. Т. 14. С. 68-76.
4. Местников С. В. Аппроксимация области неопределенности в дифференциальных играх поиска // Дифференц. уравнения. 1992. N 6. Т. 28. С. 967-972.
5. Mestnikov S. V. Estimates for the detection probability and uncertainty domain in a differential search game // Мат. заметки ЯГУ. 1994, Т. 1, вып. 2. С. 99-104.
6. Mestnikov S. V. Information sets and mixed strategies in a differential search game // Мат. заметки ЯГУ. 1996. Т. 3, вып. 1. С. 87-94.
7. Mestnikov S. V. Approximation of The Information Sets in Differential Search game with Detail of Pursuers // Proc. Tenth Intern. Sympos. Dynamic Games Appl. St. Petersburg. Russia. 2002. P. 630-631.
8. Местников С.В. Аппроксимация информационного множества дифференциальной игры поиска с нарядом ищущих // Мат. заметки ЯГУ. 2002. Т. 9, вып. 1. С. 58-71.
9. Mestnikov S. V., Everstova G. V. Approximation of the information set in a differential search game with a team of evaders // Contributions to Game Theory and Management.

Vol. 3. St.Petersburg. 2010. P.280–288.

10. *Mestnikov S. V., Petrov N. V., Everstova G. V.* Numerical cobstruction of the information sets in the simple search game with a team of pursuers and estimates for a detection probability // Collected abstracts of papers presented on the Eighth International Conference Game Theory and Management (GTM2014), Graduate School of Management SPbU. 2014. P.207–208.
11. *Hohzaki R.* Search games: Literature and survey // J. Operat. Res. Soc. Japan. 2016. V 59, N 1. P. 1–34.

Статья поступила 24 января 2017 г.

Местников Семен Владимирович, Петров Николай Владимирович
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова
Институт математики и информатики
ул. Кулаковского 42, Якутск 677891
mestsv@mail.ru, stalker_pnv@mail.ru

NUMERICAL CONSTRUCTION
OF THE INFORMATION SET AND SUFFICIENT
CONDITIONS FOR k -DETECTION IN THE SIMPLE
SEARCH GAME ON THE PLANE

S. V. Mestnikov and N. V. Petrov

Abstract. The antagonistic differential simple search game on the plane is considered. The searcher is moving along straight lines. Using the auxiliary game with a detail of pursuers the estimates for the detection probability are determined. The information sets are built in the example with two and three pursuers.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9243

Keywords: differential search game, information set, mixed strategies.

REFERENCES

1. Petrosyan L. A. and Zenkevich N. A. Optimal Search under Conditions of Conflict. Textbook [in Russian], Leningr. Univ., Leningrad (1987).
2. Petrosyan L. A. and Garnae A. Yu. Search Games. Textbook [in Russian], Izdat. St. Petersburg Univ., St. Petersburg (1992).
3. Zenkevich N. A. and Mestnikov S. V. "Dynamic search for a moving object in conditions of a conflict," in: Control of dynamical systems (A. T. Taldykin, ed.), Vopr. Mekh. Protsessov Upr., **14**, 68–76 (1991).
4. Mestnikov S. V. "Approximation of the domain of uncertainty in differential search games," Differ. Equations, **28**, No. 6, 967–972 (1992).
5. Mestnikov S. V. "Estimates for the detection probability and uncertainty domain in a differential search game," Mat. Zamet. YaGU, **1**, No. 2, 99–104 (1994).
6. Mestnikov S. V. "Information sets and mixed strategies in a differential search game," Mat. Zamet. YaGU, **3**, No. 1, 87–94 (1996).
7. Mestnikov S. V. "Approximation of the information sets in differential search game with detail of pursuers," in: Proc. 10th Int. Symp. Dynamic Games Appl., St. Petersburg, Russia, 630–631 (2002).
8. Mestnikov S. V. "Approximation of the information set of a differential search game with detail of searchers," Mat. Zamet. YaGU, **9**, No. 1, 58–70 (2002).
9. Mestnikov S. V. and Everstova G. V. "Approximation of the information set in a differential search game with a team of evaders," in: Contributions to Game Theory and Management. Vol. 3. The 3rd Int. Conf. Game Theory and Management (GTM 2009) Coll. Papers, Graduate School of Management, St. Petersburg Univ., St. Petersburg, 280–288 (2010).
10. Mestnikov S. V., Petrov N. V., and Everstova G. V. "Numerical construction of the information sets in a simple search game with a team of pursuers and estimates for the detection probability," in: The 8th Int. Conf. Game Theory and Management (GTM 2014) Coll. Papers, Graduate School of Management, St. Petersburg Univ., St. Petersburg, 207–208 (2014).

-
11. Hohzaki R. "Search games: Literature and survey," J. Oper. Res. Soc. Japan. **59**, No. 1, 1–34 (2016).

Submitted January 24, 2017

Semen V. Mestnikov and Nikolay V. Petrov
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
42, Kulakovsky St., Yakutsk 677000, Russia
mestsv@mail.ru, stalker_pnv@mail.ru