

## ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА САМАРСКОГО — ИОНКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

А. И. Кожанов, Г. И. Тарасова

**Аннотация.** Целью работы является исследование разрешимости нелокальных задач с обобщенным граничным условием Самарского — Ионкина для специального класса уравнений соболевского типа — именно, для уравнений, называемых псевдопараболическими уравнениями. Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений — решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение. Описываются также некоторые усиления и обобщения полученных результатов.

DOI: 10.25587/2411-9326-2026-2-71-87

**Ключевые слова:** псевдопараболические уравнения, нелокальные задачи, обобщенное условие Самарского — Ионкина, регулярные решения, существование, единственность.

*Посвящается Ивану Егоровичу Егорову  
по случаю его 75-летия*

### Введение

Нелокальные задачи с условием Ионкина занимают особое место в теории краевых задач для дифференциальных уравнений. Систематическое исследование подобных задач началось с работы Н. И. Ионкина [1], опубликованной в 1977 г. Как было показано в данной работе, нелокальная задача с представленным в ней условием обладает особенностями, существенно отличающими ее от классических задач. В [1] был предложен оригинальный метод доказательства разрешимости изучаемой задачи, этот метод в дальнейшем неоднократно использовался в различных ситуациях, связанных с нелокальными задачами с условием [1] (см. [2–11]).

Наряду с методом, предложенным в [1], в исследованиях разрешимости пространственно-нелокальных задач использовались и иные методы (см. работы [12–17]). В настоящей работе будут использоваться прежде всего методы, представленные в последних работах [16, 17].

---

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2026-1328, февраль 20, 2026.

Заметим также следующее. В 1980 г. А. А. Самарский в работе [18] предложил постановку краевой задачи для параболических уравнений с одной пространственной переменной, включающую в себя как постановки естественных первой, второй, третьей или смешанной краевых задач, так и постановки многих нелокальных задач, в том числе задачи с нелокальным условием работы [1]. Но значительно раньше, на рубеже XIX и XX веков, аналогичную постановку предложил В. А. Стеклов (см. [19, 20]). По-видимому, работы В. А. Стеклова, связанные с постановками краевых задач для параболических уравнений, остались незамеченными, и в последнее время задачи с нелокальным условием работы [1] и ее аналогами в мировой литературе называют «задачами Самарского — Ионкина». В настоящей работе авторы также будут использовать названия, связанные с именами А. А. Самарского и Н. И. Ионкина, но в то же время авторы всегда будут подразумевать более правильное с точки зрения истории математики название «задача Стеклова — Самарского — Ионкина».

В настоящей работе будут изучаться нелокальные задачи с обобщенным условием Самарского — Ионкина для нового класса дифференциальных уравнений — для псевдопараболических уравнений третьего порядка. Подобные уравнения входят в общий класс дифференциальных уравнений, называемых в последнее время «уравнениями соболевского типа». Разрешимость естественных краевых и начально-краевых задач для псевдопараболических уравнений (и иных уравнений соболевского типа) изучалась во многих работах, выделим здесь монографии [21–24]. Что касается разрешимости нелокальных задач с условием Самарского — Ионкина для псевдопараболических уравнений, то здесь можно назвать лишь работу [25]. Для уравнений, о которых будет идти речь ниже, нелокальные задачи с обобщенным условием Самарского — Ионкина ранее не изучались.

## 1. Постановка задач

Пусть  $G$  — ограниченная область из пространства  $\mathbb{R}^n$  переменных  $y_1, \dots, y_n$  с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей,  $\Omega$  — интервал  $(0, 1)$  оси  $Ox$ ,  $Q$  — область  $\Omega \times G \times (0, T)$  переменных  $x, y, t$  ( $0 < T < +\infty$ ). Далее пусть  $a(x, y, t)$ ,  $b(x, y, t)$ ,  $c(x, y, t)$ ,  $f(x, y, t)$  и  $\gamma(y, t)$  — заданные функции, определенные при  $x \in \overline{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $A, B$  и  $L$  — дифференциальные операторы, действие которых на заданной функции  $v(x, y, t)$  определяется равенствами

$$Av = v_{xx} + a(x, y, t)v_x + b(x, y, t)v,$$

$$Bv = \Delta v + c(x, y, t)v,$$

$$Lv = Bv_t + Av$$

( $\Delta$  — оператор Лапласа по переменным  $y_1, \dots, y_n$ ).

**Нелокальная краевая задача I.** Найти функцию  $u(x, y, t)$ , являющуюся в области  $Q$  решением уравнения

$$Lu = f(x, y, t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \times G; \quad (2)$$

$$u(x, y, t)|_{(x,t) \in \Omega \times (0,T), y \in \Gamma} = 0; \quad (3)$$

$$u(0, y, t) = \gamma(y, t)u(1, y, t), \quad u_x(1, y, t) = 0, \quad (y, t) \in G \times (0, T). \quad (4)$$

**Нелокальная краевая задача II.** Найти функцию  $u(x, y, t)$ , являющуюся в области  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), а также условие

$$u_x(0, y, t) = \gamma(y, t)u_x(1, y, t), \quad u(1, y, t) = 0, \quad (y, t) \in G \times (0, T). \quad (5)$$

Обозначим через  $V_0$  линейное пространство

$$V_0 = \{v(x, y, t) : v(x, y, t) \in L_2(Q), \quad v_{xx}(x, y, t) \in L_2(Q), \\ v_{xy_i}(x, y, t) \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega \times G)), \quad v_{y_i y_j t}(x, y, t) \in L_2(Q), \quad i, j = 1, \dots, n\}.$$

Будем считать далее, что в этом пространстве задана норма

$$\|v\|_{V_0} = \left( \int_Q \left( v^2 + v_{xx}^2 + \sum_{i,j=1}^n v_{y_i y_j t}^2 \right) dx dy dt + \sum_i \|v_{xy_i}\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega \times G))}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что  $V_0$  с этой нормой банахово.

Целью настоящей работы будет доказательство разрешимости нелокальных задач I и II именно в пространстве  $V_0$ .

## 2. Разрешимость нелокальной задачи I

Доказательство разрешимости нелокальной задачи I будет проведено с помощью метода регуляризации и метода продолжения по параметру. Поскольку при реализации метода регуляризации и при реализации метода продолжения по параметру требуются «хорошие» априорные оценки, установим вначале их наличие.

Пусть  $u(x, y, t)$  — решение из пространства  $V_0$  нелокальной задачи I. Заметим, что для подобных функций выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} \int_G u^2(x, y, t) dx dy \leq d_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \int_G u_{y_i}^2(x, y, t) dx dy, \quad (6)$$

в котором  $t \in [0, T]$ ,  $d_0$  — число, определяемое лишь областью  $G$ .

**Лемма 1.** Пусть выполняются условия

$$a(x, y, t) \in C(\overline{Q}), \quad a_x(x, y, t) \in C(\overline{Q}), \quad b(x, y, t) \in C(\overline{Q}), \\ c(x, y, t) \in C(\overline{Q}), \quad c_t(x, y, t) \in C(\overline{Q}), \quad b(x, y, t) \in C(\overline{Q}); \quad (7)$$

$$a(x, y, t) = xa_1(x, y, t) + a_2(x, y, t), \quad a_1(x, y, t) \in C(\overline{Q}), \\ a_2(x, y, t) \geq 0 \quad \text{при } (x, y, t) \in \overline{Q}; \quad (8)$$

$$d_0 c(x, y, t) < 1 \quad \text{при } (x, y, t) \in \overline{Q}; \quad (9)$$

$$\gamma(y, t) \in C(\overline{G} \times [0, T]). \quad (10)$$

Тогда для регулярных решений  $u(x, y, t)$  из пространства  $V_0$  краевой задачи I выполняется оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_G x \left[ u^2(x, y, t) + \sum_{i=1}^n u_{y_i}^2(x, y, t) \right] dx dy + \int_0^t \int_{\Omega} \int_G x u_x^2(x, y, \tau) dx dy d\tau \\ & + \int_0^t \int_G [u^2(0, y, \tau) + u^2(1, y, \tau)] dy d\tau \leq M_1 \int_Q f^2(x, y, \tau) dx dy d\tau \quad (11) \end{aligned}$$

с постоянной  $M_1$ , определяемой лишь функциями  $a(x, y, t)$ ,  $b(x, y, t)$ ,  $c(x, y, t)$  и  $\gamma(y, t)$ , а также областью  $G$  и числом  $T$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_{\Omega} \int_G Lu \cdot xu(x, y, \tau) dx dy d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} \int_G f(x, y, \tau) xu(x, y, \tau) dx dy d\tau.$$

Используя формулу интегрирования по частям и учитывая краевые условия (2)–(4), нетрудно от данного равенства перейти к следующему:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \int_G x u_{y_i}^2(x, y, t) dx dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_G xc(x, y, t) u^2(x, y, t) dx dy \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} \int_G x u_x^2(x, y, \tau) dx dy d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \int_G a_2(x, y, \tau) u^2(x, y, \tau) dx dy d\tau \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} \int_G x \left[ b(x, y, \tau) - \frac{1}{2} c_t(x, y, \tau) - \frac{1}{2} a_1(x, y, \tau) - \frac{1}{2} a_x(x, y, \tau) \right] u^2(x, y, \tau) dx dy d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \int_G [\gamma^2(y, \tau) + a(1, y, \tau) - 1] u^2(1, y, \tau) dy d\tau \\ & - \int_0^t \int_{\Omega} \int_G x f(x, y, \tau) u(x, y, \tau) dx dy d\tau. \quad (12) \end{aligned}$$

Используя неравенство (6), а также неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_G u^2(1, y, \tau) dy d\tau \leq \delta^2 \int_0^t \int_{\Omega} \int_G x u_x^2(x, y, \tau) dx dy d\tau \\ & + \left( 2 + \frac{1}{\delta^2} \right) \int_0^t \int_{\Omega} \int_G x u^2(x, y, \tau) dx dy d\tau \quad (13) \end{aligned}$$

в котором  $\delta$  — произвольное число (см. [16, 17]), учитывая условия (7)–(10), применяя неравенство Юнга и, наконец, используя лемму Гронуолла, получим, что для решений  $u(x, y, t)$  нелокальной задачи I из пространства  $V_0$  будет выполняться оценка

$$\int_{\Omega} \int_G x u^2(x, y, t) dx dy + \int_0^t \int_{\Omega} \int_G x u_x^2(x, y, \tau) dx dy d\tau \leq K_1 \int_Q f^2(x, y, \tau) dx dy d\tau \quad (14)$$

с постоянной  $K_1$ , определяемой лишь функциями  $a(x, y, t)$ ,  $b(x, y, t)$ ,  $c(x, y, t)$  и  $\gamma(y, t)$ , а также областью  $\Omega$  и числом  $T$ .

Возвращаясь к равенству (12) и используя еще раз неравенство (13), получим, что справедлива требуемая оценка (11).

Лемма доказана.

С помощью оценки (11) нетрудно доказать единственность в пространстве  $V_0$  решения нелокальной задачи I, но сделаем это позже.

Следующие оценки будут получены на решениях вспомогательной задачи; связь этих оценок с исходной задачей будет пояснена ниже.

Пусть  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и  $\rho$  — положительные числа, величины которых будут уточнены ниже. Далее, пусть  $L_{\varepsilon, \mu, \rho}$  — оператор, действие которого на заданной функции  $v(x, y, t)$  определяется равенством

$$L_{\varepsilon, \mu, \rho} v = -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta^2 (v_{xx} - \mu v) + Lv + \rho \Delta v + \rho c v.$$

**Вспомогательная задача.** Найти функцию  $v(x, y, t)$ , являющуюся в области  $Q$  решением уравнения

$$L_{\varepsilon, \mu, \rho} v = g(x, y, t) \quad (15)$$

( $g(x, y, t)$  — заданная функция) и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4), а также условия

$$v_t(x, y, T) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \times G; \quad (16)$$

$$\Delta v(x, y, t)|_{(x, t) \in \Omega \times (0, T), y \in \Gamma} = 0. \quad (17)$$

Уточним, что всюду ниже регулярным решением данной вспомогательной задачи называется функция  $v(x, y, t)$ , имеющая все суммируемые с квадратом по области  $Q$  обобщенные производные, входящие в уравнение (15), и удовлетворяющая уравнению (15) почти всюду в  $Q$ .

**Лемма 2.** Пусть выполняются все условия леммы 1, а также условия

$$a_t(x, y, t) \in C(\overline{Q}), \quad b_t(x, y, t) \in C(\overline{Q}), \quad c_t(x, y, t) \in C(\overline{Q}); \quad (18)$$

$$\frac{\partial^{k+l} \gamma(y, t)}{\partial y_i^k \partial t^l} \in C(\overline{G} \times [0, T]), \quad k = 0, 1, 2, \quad l = 0, 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Тогда существуют положительные числа  $\mu_1$  и  $\rho_1$  такие, что при  $\varepsilon > 0$ ,  $\mu \geq \mu_1$ ,  $\rho \geq \rho_1$  для регулярных решений  $v(x, y, t)$  вспомогательной задачи (15), (2)–(4), (16), (17) будет выполняться оценка

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_Q x[(\Delta v_{xt})^2 + (\Delta v_t)^2] dx dy dt + \varepsilon \int_0^T \int_G \{[\Delta v_t(1, y, t)]^2 + [\Delta v_t(0, y, t)]^2\} dy dt \\ & + \int_Q x(v_x^2 + v^2) dx dy dt + \int_0^T \int_G [v^2(1, y, t) + v^2(0, y, t)] dy dt \leq M_2 \int_Q g^2 dx dy dt, \end{aligned} \quad (20)$$

постоянная  $M_2$  в которой определяется лишь функциями  $a(x, y, t)$ ,  $b(x, y, t)$ ,  $c(x, y, t)$  и  $\gamma(y, t)$ , а также областью  $G$  и числом  $T$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (15) на функцию  $-xv(x, y, t)$  и проинтегрируем по области  $Q$ . После применения формулы интегрирования по частям и использования краевых условий получим равенство

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_Q x[(\Delta v_{xt})^2 + \mu(\Delta v_t)^2] dx dy dt + \int_Q v_x^2 dx dy dt + \rho \sum_{i=1}^n \int_Q x v_{y_i}^2 dx dy dt \\ & + \frac{1}{2} \int_Q a_2 v^2 dx dy dt + \int_Q x \left[ \frac{a_1}{2} - \rho c - x b \right] v^2 dx dy dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \int_G x v_{y_i}^2(x, y, T) dx dy \\ & = \varepsilon \int_0^T \int_G \varphi(y, t, \gamma(y, t), v(1, y, t)) dy dt \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_G (\gamma^2 - 1) v^2(1, y, t) dy dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_G a(1, y, t) v^2(1, y, t) dy dt - \int_Q x g v dx dy dt, \end{aligned}$$

в котором  $\varphi(y, t, \gamma(y, t), v(1, y, t))$  — квадратичная форма от функций  $v(1, y, t)$ ,  $v_t(1, y, t)$ ,  $v_{y_i}(1, y, t)$ ,  $v_{y_i t}(1, y, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\Delta v(1, y, t)$ ,  $\Delta v_t(1, y, t)$  с коэффициентами, определяемыми функцией  $\gamma(y, t)$ .

Заметим прежде всего, что вследствие неравенства (6) и условия (9) существует положительное число  $\rho_0$  такое, что при  $\rho \geq \rho_0$  выполняется

$$\rho \left( \frac{1}{d_0} - c(x, y, t) \right) + \frac{a_1(x, y, t)}{2} - b(x, y, t) \geq c_0 > 0, \quad (x, y, t) \in \overline{Q}. \quad (22)$$

Оценивая форму  $\varphi$  сверху суммой квадратов, далее оценивая интеграл от каждого квадрата через интеграл от функции  $\Delta v_t(1, y, t)$  (что возможно) и, наконец, применяя к функции  $\Delta v_t(1, y, t)$  неравенство (13), получим, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_G \varphi(y, t, \gamma(y, t), v(1, y, t)) dy dt \\ & \leq \delta_0 \int_Q x(\Delta v_{xt})^2 dx dy dt + C(\delta_0) \int_Q x(\Delta v_t)^2 dx dy dt, \end{aligned} \quad (23)$$

в которой  $\delta_0$  — произвольное положительное число, число  $C(\delta_0)$  определяется помимо числа  $\delta_0$  также функцией  $\gamma(y, t)$ , областью  $G$  и числом  $T$ . Зафиксируем число  $\delta_0$ :  $\delta_0 = \frac{1}{2}$ . Поскольку теперь  $C(\frac{1}{2})$  — фиксированное число, существует число  $\mu_1$  такое, что выполняется  $\mu_1 - C(\frac{1}{2}) > 0$ . Таким образом, при  $\rho \geq \rho_0$  и  $\mu \geq \mu_1$  следствием (21) будет неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{2} \int_Q x \left\{ (\Delta v_{xt})^2 + \left[ \mu_1 - C\left(\frac{1}{2}\right) \right] (\Delta v_t)^2 \right\} dx dy dt + \int_Q x v_x^2 dx dy dt \\ & + c_0 \int_Q x v^2 dx dy dt \leq K_2 \int_0^T \int_G v^2(1, y, t) dy dt + \left| \int_Q x g v dx dy dt \right|, \quad (24) \end{aligned}$$

число  $K_2$  в котором определяется лишь функциями  $\gamma(y, t)$  и  $a(1, y, t)$ .

Первое слагаемое правой части (24) оценим с помощью неравенства (13):

$$K_2 \int_0^T \int_G v^2(1, y, t) dy dt \leq K_2 \delta_1^2 \int_Q x v_x^2 dx dy dt + K_2 \left( 2 + \frac{1}{\delta_1^2} \right) \int_Q x v^2 dx dy dt.$$

Зафиксируем число  $\delta_1$ :  $K_2 \delta_1^2 = \frac{1}{2}$ . Заметим, что существует  $\rho_1$  из промежутка  $[\rho_0, \infty)$  такое, что для числа  $c_0$  из неравенства (22) будет выполняться  $c_0 > K_2(2 + 2K_2)$ . Но тогда из (24) и из неравенства Юнга следует, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{2} \int_Q x \left\{ (\Delta v_{xt})^2 + \left[ \mu_1 - c\left(\frac{1}{2}\right) \right] (\Delta v_t)^2 \right\} dx dy dt + \frac{1}{2} \int_Q x v_x^2 dx dy dt \\ & + \frac{1}{2} [c_0 - K_2(2 + 2K_2)] \int_Q x v^2 dx dy dt \leq \frac{1}{[c_0 - K_2(2 + 2K_2)]} \int_Q g^2 dx dy dt. \quad (25) \end{aligned}$$

Заметим теперь, что числа  $\rho_1$  и  $\mu_1$  определяются лишь функциями  $a(x, y, t)$ ,  $b(x, y, t)$ ,  $c(x, y, t)$  и  $\gamma(y, t)$ , областью  $G$  и числом  $T$  и поэтому могут быть выбраны изначально. Отсюда следует, что при указанном выше выборе чисел  $\rho_1$  и  $\mu_1$  для регулярных решений  $v(x, y, t)$  задачи (15), (2)–(4), (16), (17) будет выполняться оценка

$$\varepsilon \int_Q x [(\Delta v_{xt})^2 + (\Delta v_t)^2] dx dy dt + \int_Q x (v_x^2 + v^2) dx dy dt \leq K_3 \int_Q g^2 dx dy dt$$

с постоянной  $K_3$ , определяемой функциями  $a(x, y, t)$ ,  $b(x, y, t)$ ,  $c(x, y, t)$ ,  $\gamma(y, t)$ , областью  $G$  и числом  $T$ . Из этой оценки и из неравенства (13) для функций  $\Delta v_t(1, y, t)$  и  $v(1, y, t)$  вытекает требуемая оценка (20).

Лемма доказана.

**Лемма 3.** Пусть выполняются все условия леммы 1, условие (18), а также условие

$$\frac{\partial^{k+l} \gamma(y, t)}{\partial y_i^k \partial t^l} \in C(\overline{G} \times [0, T]), \quad k = 0, 1, 2, \quad l = 0, 1, 2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда существуют положительные числа  $\mu_2$  и  $\rho_2$  такие, что при  $\varepsilon > 0$ ,  $\mu \geq \max(\mu_1, \mu_2)$ ,  $\rho \geq \max(\rho_1, \rho_2)$  для регулярных решений  $v(x, y, t)$  вспомогательной краевой задачи (15), (2)–(4), (16), (17) будет выполняться оценка

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_Q x[(\Delta v_{xtt})^2 + (\Delta v_{tt})^2] dx dy dt + \varepsilon \int_0^T \int_G [(\Delta v_{tt}(1, y, t))^2 + (\Delta v_{tt}(0, y, t))^2] dy dt \\ & + \int_Q x \left[ v_{xt}^2 + \sum_{i=1}^n v_{y_{it}}^2 \right] dx dy dt + \int_0^T \int_G [v_t^2(1, y, t) + v_t^2(0, y, t)] dy dt \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \int_G v_{y_{it}}^2(x, y, 0) dx dy \leq M_3 \int_Q (g^2 + g_t^2) dx dy dt, \quad (26) \end{aligned}$$

постоянная  $M_3$  в которой определяется лишь функциями  $a(x, y, t)$ ,  $b(x, y, t)$ ,  $c(x, y, t)$ ,  $\gamma(y, t)$ , областью  $G$  и числом  $T$ .

**Доказательство.** Умножим уравнение (15) на функцию  $xv_{tt}(x, y, t)$  и проинтегрируем по области  $Q$ . В полученном равенстве выполним действия, аналогичные действиям, выполненным при доказательстве леммы 2, и лишь в интеграле с функцией  $g(x, y, t)$  выполним интегрирование по частям по переменной  $t$ . Используя неравенство Юнга и учитывая неравенство (20), нетрудно получить требуемую оценку (26).

Лемма доказана.

Следующие оценки доказываются аналогично доказательству оценок (20) и (26), при этом в доказательстве каждой следующей оценки используются предыдущие.

**Лемма 4.** Пусть выполняются все условия леммы 2, а также условие

$$\frac{\partial^{k+l}\gamma(y, t)}{\partial y_i^k \partial t^l} \in C(\overline{G} \times [0, T]), \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad l = 0, 1, 2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда существуют положительные числа  $\mu_3$  и  $\rho_3$  такие, что при  $\varepsilon > 0$ ,  $\mu \geq \max(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ,  $\rho \geq \max(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$  для регулярных решений  $v(x, y, t)$  вспомогательной краевой задачи (15), (2)–(4), (16), (17) будет выполняться оценка

$$\begin{aligned} & \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_Q x[(\Delta v_{xy_{it}})^2 + (\Delta v_{y_{it}t})^2] dx dy dt \\ & + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_G [(\Delta v_{y_{it}t}(1, y, t))^2 + (\Delta v_{y_{it}t}(0, y, t))^2] dy dt + \sum_{i=1}^n \int_Q x v_{xy_{it}}^2 dx dy dt \\ & + \int_Q x (\Delta v_t)^2 dx dy dy + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_G [v_{y_{it}}^2(1, y, t) + v_{y_{it}}^2(0, y, t)] dy dt \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Omega} \int_G v_t^2(x, y, 0) dx dy \leq M_4 \int_Q (g^2 + g_t^2) dx dy dt, \quad (27)$$

постоянная  $M_4$  в которой определяется лишь функциями  $a(x, y, t)$ ,  $b(x, y, t)$ ,  $c(x, y, t)$ ,  $\gamma(y, t)$ , областью  $G$  и числом  $T$ .

**Лемма 5.** Пусть выполняются все условия леммы 2, а также условие

$$\frac{\partial^{k+l} \gamma(y, t)}{\partial y_i^k \partial t^l} \in C(\overline{G} \times [0, T]), \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad l = 0, 1, 2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда при дополнительном условии

$$g(x, y, t) = 0 \text{ при } y \in \Gamma, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad t \in [0, T],$$

существуют положительные числа  $\mu_4$  и  $\rho_4$  такие, что при  $\varepsilon > 0$ ,  $\mu \geq \max(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ ,  $\rho \geq \max(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$  для регулярных решений  $v(x, y, t)$  вспомогательной краевой задачи (15), (2)–(4), (16), (17) будет выполняться оценка

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_Q x[(\Delta v_{xtt})^2 + (\Delta v_{tt})^2] dx dy dt \\ & + \varepsilon \int_0^T \int_G [(\Delta^2 v_{tt}(1, y, t))^2 + (\Delta^2 v_{tt}(0, y, t))^2] dy dt + \int_Q x(\Delta v_{xt})^2 dx dy dt \\ & + \sum_{i=1}^n \int_Q x(\Delta v_{y_i t})^2 dx dy dt + \int_0^T \int_G ([v_t(1, y, t)]^2 + [v_t(0, y, t)]^2) dy dt \\ & \leq M_5 \int_Q \left( g^2 + g_t^2 + \sum_{i=1}^n g_{y_i t}^2 \right) dx dy dt, \quad (28) \end{aligned}$$

постоянная  $M_5$  в которой определяется лишь функциями  $a(x, y, t)$ ,  $b(x, y, t)$ ,  $c(x, y, t)$ ,  $\gamma(y, t)$ , областью  $G$  и числом  $T$ .

Доказательство этих лемм проводится с помощью последовательного анализа равенств

$$\begin{aligned} - \int_Q x L_{\varepsilon, \mu, \rho} v \cdot \Delta v_{tt} dx dy dt &= - \int_Q x g \Delta v_{tt} dx dy dt, \\ \int_Q x L_{\varepsilon, \mu, \rho} v \cdot \Delta^2 v_{tt} dx dy dt &= \int_Q x g \Delta^2 v_{tt} dx dy dt. \end{aligned}$$

**Лемма 6.** Пусть выполняются все условия леммы 5. Тогда для регулярных решений  $v(x, y, t)$  краевой задачи (15), (2)–(4), (16), (17) будет выполняться оценка

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_Q [(\Delta v_{xtt})^2 + (\Delta v_{xt})^2] dx dy dt + \int_Q v_{xx}^2 dx dy dt \\ & \leq M_6 \int_Q \left( g^2 + g_t^2 + \sum_{i=1}^n g_{y_i t}^2 \right) dx dy dt, \quad (29) \end{aligned}$$

постоянная  $M_6$  в которой определяется лишь функциями  $a(x, y, t)$ ,  $b(x, y, t)$ ,  $c(x, y, t)$ ,  $\gamma(y, t)$ , областью  $G$  и числом  $T$ .

Доказательство этой леммы проводится с помощью анализа равенства

$$\int_Q L_{\varepsilon, \mu, \rho} v \cdot v_{xx} dx dy dt = \int_Q g v_{xx} dx dy dt$$

при использовании формулы интегрирования по частям, оценок (20), (26)–(28), а также неравенства

$$\int_0^T \int_G v_x^2(0, y, t) dy dt \leq \delta \int_Q v_{xx}^2 dx dy dt + C(\delta) \int_Q v^2 dx dy dt$$

( $\delta$  — произвольное положительное число).

**Лемма 7.** Пусть выполняются все условия леммы 5. Тогда для регулярных решений  $v(x, y, t)$  краевой задачи (15), (2)–(4), (16), (17) будет выполняться оценка

$$\varepsilon^2 \int_Q (\Delta^2 v_{xxtt})^2 dx dy dt \leq M_7 \int_Q \left( g^2 + g_t^2 + \sum_{i=1}^n g_{y_i t}^2 \right) dx dy dt, \quad (30)$$

постоянная  $M_7$  в которой определяется лишь функциями  $a(x, y, t)$ ,  $b(x, y, t)$ ,  $c(x, y, t)$ ,  $\gamma(y, t)$ , областью  $G$  и числом  $T$ .

Доказательство этой леммы очевидно.

Перейдем к доказательству разрешимости, т. е. доказательству существования и единственности решений нелокальной задачи I.

**Теорема 1.** Пусть выполняются все условия леммы 1. Тогда нелокальная задача I не может иметь в пространстве  $V_0$  более одного решения.

Доказательство. Пусть в нелокальной задаче I выполняется  $f(x, y, t) \equiv 0$ . Оценка (11) в этом случае означает, что выполняется равенство

$$u(0, y, t) = 0, \quad y \in G, \quad t \in (0, T).$$

Другими словами, решение  $u(x, y, t)$  нелокальной задачи I является решением однородной смешанной краевой задачи для псевдопараболического уравнения (1), т. е. тождественно нулевой в  $Q$  функцией. А это и означает справедливость утверждения о единственности.

Теорема доказана.

Обозначим через  $V_1$  множество функций

$$V_1 = \{v(x, y, t) : v(x, y, t) \in V_0, \quad v_{xxtt}(x, y, t) \in L_2(Q), \\ \Delta v_{xxtt}(x, y, t) \in L_2(Q), \quad \Delta^2 v_{xxtt}(x, y, t) \in L_2(Q)\}.$$

Очевидно, что это множество есть линейное пространство; если его наделить нормой

$$\|v\|_{V_1} = \left\{ \|v\|_{V_0}^2 + \int_Q [v_{xxtt}^2 + (\Delta v_{xxtt})^2 + (\Delta^2 v_{xxtt})^2] dx dy dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

то оно станет банаховым пространством.

**Теорема 2.** Пусть выполняются все условия леммы 5. Тогда для любой функции  $f(x, y, t)$  такой, что  $f(x, y, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_t(x, y, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_{ty_i}(x, y, t) \in L_2(Q)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $f(x, y, t) = 0$  при  $y \in \Gamma$ ,  $x \in \overline{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$  нелокальная задача  $I$  имеет решение  $u(x, y, t)$ , принадлежащее пространству  $V_0$ .

**Доказательство.** Для фиксированных  $\rho, \mu$  из промежутков  $(\rho_4, +\infty)$  и  $(\mu_4, +\infty)$  и для функции  $g(x, y, t) = e^{-\rho t} f(x, y, t)$  рассмотрим вспомогательную краевую задачу (15), (2)–(4), (16), (17). Заметим прежде всего, что при фиксированном положительном  $\varepsilon$  левые части в неравенствах (26)–(30) можно оценить числами  $M'_i \|g\|_{L_2(Q)}^2$  с постоянными  $M'_i$ ,  $i = \overline{3, 7}$ , определяемыми функциями  $a(x, y, t)$ ,  $b(x, y, t)$ ,  $c(x, y, t)$ , областью  $G$ , числом  $T$ , а также числом  $\varepsilon$ . Это означает, что при фиксированном  $\varepsilon$  вспомогательная задача в указанном случае имеет решение  $v(x, y, t)$ , принадлежащее банахову пространству  $V_1$  (доказательство этого факта нетрудно провести с помощью метода продолжения по параметру, например, как это делалось в работах [26, 27]).

Итак, вспомогательная задача (15), (2)–(4), (16), (17) при фиксированных  $\rho$  и  $\mu$  из промежутков  $(\rho_4, +\infty)$  и  $(\mu_4, +\infty)$  имеет решение  $v_\varepsilon(x, y, t)$ , принадлежащее пространству  $V_1$ . Поскольку при выполнении условий теоремы для вспомогательной задачи выполняются условия, обеспечивающие справедливость равномерных по  $\varepsilon$  оценок (20), (26)–(30), то согласно свойству рефлексивности гильбертова пространства существуют последовательности  $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$  положительных чисел и  $\{v_m(x, y, t)\}_{m=1}^\infty$  решений задачи (15), (2)–(4), (16), (17) при  $\varepsilon = \varepsilon_m$  такие, что при  $m \rightarrow \infty$  выполняются сходимости

$$\varepsilon_m \rightarrow 0,$$

$$\varepsilon_m (\Delta^2 v_{mxxtt} - \mu \Delta^2 v_{mtt}) \rightarrow 0 \text{ слабо в } L_2(Q),$$

$$Lv_m \rightarrow Lv \text{ слабо в } L_2(Q),$$

причем предельная функция  $v = v(x, y, t)$  принадлежит пространству  $V_0$ , является решением уравнения

$$Lv + \rho \Delta v + \Delta c v = e^{-\rho t} f(x, y, t)$$

и для нее выполняются условия (2)–(4).

Определим функцию  $u(x, y, t)$ :

$$u(x, y, t) = e^{\rho t} v(x, y, t).$$

Эта функция и будет искомым решением нелокальной задачи  $I$ .

Теорема доказана.

## 2. Разрешимость нелокальной задачи II

Исследование разрешимости нелокальной задачи II будет проведено с помощью техники, представленной в [16, 17], а именно, сведения к нелокальной задаче I.

Обозначим через  $\widetilde{V}_0$  линейное пространство

$$\widetilde{V}_0 = \{v(x, y, t) : v(x, y, t) \in V_0, \quad v_x(x, y, t) \in V_0\}.$$

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия

$$\begin{aligned} a(x, y, t) \in C(\overline{Q}), \quad a_x(x, y, t) \in C(\overline{Q}), \quad b(x, y, t) \in C(\overline{Q}), \quad b_x(x, y, t) \in C(\overline{Q}), \\ c \equiv c(y, t) \in C(\overline{G} \times [0, T]); \\ d_0 c(y, t) < 1 \quad \text{при } (y, t) \in \overline{G} \times [0, T]; \\ \gamma(y, t) \in C(\overline{G} \times [0, T]). \end{aligned}$$

Тогда нелокальная задача II не может иметь в пространстве  $\widetilde{V}_0$  более одного решения.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Принадлежность возможного решения пространству  $\widetilde{V}_0$  означает, что уравнение (1) можно дифференцировать по переменной  $x$  и что имеет место равенство

$$u_{xx}(1, y, t) + a(1, y, t)u_x(1, y, t) = f(1, y, t). \quad (31)$$

Умножая уравнение  $\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = f_x$  на функцию  $xu_x$ , интегрируя по цилиндру  $\Omega \times G \times (0, t)$ , используя условия теоремы, равенство (31), неравенства (6) и (14), а также применяя лемму Гронуолла, получим, что для решений  $u(x, y, t)$  нелокальной задачи II из пространства  $\widetilde{V}_0$  выполняется оценка

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_G x \left[ u^2(x, y, t) + u_x^2(x, y, t) + \sum_{i=1}^n u_{y_i}^2(x, y, t) + \sum_{i=1}^n u_{xy_i}^2(x, y, t) \right] dx dy \\ + \int_0^t \int_{\Omega} \int_G x [u_x^2(x, y, \tau) + u_{xx}^2(x, y, \tau)] dx dy d\tau \\ + \int_0^t \int_G [u^2(0, y, \tau) + u_x^2(0, y, \tau) + u_x^2(1, y, \tau)] dy d\tau \\ \leq R_1 \int_Q [f^2(x, y, t) + f_x^2(x, y, t)] dx dy dt \quad (32) \end{aligned}$$

с постоянной  $R_1$ , определяемой лишь функциями  $a(x, y, t)$ ,  $b(x, y, t)$ ,  $c(x, y, t)$ , областью  $G$  и числом  $T$ . Из этой оценки следует, что в случае  $f(x, y, t) \equiv 0$  в нелокальной задаче II выполняется  $u(0, y, t) = 0$  при  $(y, t) \in G \times (0, T)$ . Но тогда функция  $u(x, y, t)$  будет решением смешанной задачи с однородными данными для уравнения (1); поскольку эта задача имеет лишь нулевое решение, то утверждение теоремы 3 справедливо.

Теорема доказана.

Обозначим  $b_1(x, y, t) = a_x(x, y, t) + b(x, y, t)$ .

**Теорема 4.** Пусть выполняются условия

$$c(x, y, t) \equiv c(y, t) \in C(\overline{G} \times [0, T]), \quad c_t(y, t) \in C(\overline{G} \times [0, T]);$$

$$d_0 c(y, t) < 1 \quad \text{при } (y, t) \in \overline{G} \times [0, T];$$

$$a(x, y, t) \in C(\overline{Q}), \quad a_t(x, y, t) \in C(\overline{Q});$$

$$b_x(x, y, t) \in C(\overline{Q}), \quad b_1(x, y, t) \in C(\overline{Q}), \quad b_{1t}(x, y, t) \in C(\overline{Q});$$

$$\frac{\partial^{k+l} \gamma(y, t)}{\partial y_i^k \partial t^l} \in C(\overline{G} \times [0, T]), \quad k = 0, 1, 2, \quad l = 0, 1, 2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда для любой функции  $f(x, y, t)$  такой, что  $f(x, y, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_x(x, y, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_t(x, y, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_{xt}(x, y, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_{yit}(x, y, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_{xyit}(x, y, t) \in L_2(Q)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $f(x, y, t) = 0$  при  $y \in \Gamma$ ,  $x \in \overline{\Omega}$ ,  $f(1, y, t) = 0$  при  $y \in \overline{G}$ ,  $t \in [0, T]$  нелокальная задача II имеет решение  $u(x, y, t)$ , принадлежащее пространству  $V_1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим краевую задачу: найти функцию  $w(x, y, t)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения

$$\Delta w_t + w_{xx} + aw_x + bw + cw_t - b_x \int_x^1 w(\xi, y, t) d\xi = f_x(x, y, t)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$w(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \times G;$$

$$w(x, y, t)|_{(x, y) \in \Omega \times (0, T), y \in \Gamma} = 0;$$

$$w(0, y, t) = \gamma(y, t)w(1, y, t), \quad w_x(1, y, t) + a(1, y, t)w(1, y, t) = 0, \quad (y, t) \in G \times [0, T].$$

Эта задача лишь младшими членами в уравнении и в нелокальном условии отличается от нелокальной задачи I. Но поскольку эти младшие члены являются подчиненными, то данная задача имеет решение  $w(x, y, t)$ , принадлежащее пространству  $V_0$  (собственно доказательство проводится вполне аналогично доказательству теоремы 2 с использованием соответствующего оператора регуляризации и тех же самых априорных оценок). По функции  $w(x, y, t)$  и краевому условию  $u(1, y, t) = 0$  определим функцию  $u(x, y, t)$ :

$$u(x, y, t) = - \int_x^1 w(\xi, y, t) d\xi.$$

Очевидно, что эта функция и будет искомым решением нелокальной задачи II.

Теорема доказана.

### Заключение

В работе представлены результаты о разрешимости в классах регулярных решений начально-краевых задач с обобщенным нелокальным условием Самарского — Ионкина для псевдопараболических уравнений третьего порядка. Эти результаты являются новыми, их легко перенести на псевдопараболические уравнения с заменой оператора Лапласа по переменным  $y_1, \dots, y_n$  более общим эллиптическим оператором, в том числе оператором высокого порядка, и с заменой производной  $u_{xx}$  на слагаемое  $a_0(x, y, t)u_{xx}$  со строго положительной функцией  $a_0(x, y, t)$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
2. Ионкин Н. И. Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1279–1283.
3. Моисеев Е. И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 8. С. 1054–1100.
4. Beilin S. A. Existence of solutions for one-dimensional wave equation with nonlocal conditions // Electron. J. Differ. Equ. 2001. V. 76. P. 1–8.
5. Моисеев Е. И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 11. С. 1565–1567.
6. Калиев И. А., Сабитова М. М. Задача определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 1. С. 89–97.
7. Сабитова Ю. К. Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2009. № 12. С. 49–58.
8. Berdyshev A. S., Cabada A., Kadirkulov B. J. The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62, N 10. P. 3884–3893.
9. Ismailov M. I., Kanca F. An inverse coefficient problems for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and overdetermination condition // Math. Methods Appl. Sci. 2011. V. 34, № 6. P. 692–702.
10. Sadybekov M. A. Initial-boundary value problem for a heat equation with not strongly regular boundary conditions // Functional Analysis in Interdisciplinary Applications. Symp. FAIA. 2017. P. 330–348.
11. Сабитов К. Б., Егорова И. П. О корректности краевых задач с условиями периодичности для уравнений смешанного типа // Вестн. Самарск. техн. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, № 3. С. 430–451.
12. Юрчук Н. И. Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2117–2126.
13. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
14. Нахушева З. А. Задача Самарского для уравнения фрактальной диффузии // Мат. заметки. 2014. Т. 95, вып. 6. С. 878–883.
15. Кожанов А. И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 769–774.
16. Кожанов А. И. Нелокальные задачи с обобщенным условием Самарского — Ионкина для некоторых классов нестационарных дифференциальных уравнений // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 509. С. 5053.
17. Кожанов А. И. Нелокальные задачи и задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных: сводка результатов, нерешенные задачи. Новосибирск: Наука, 2024.

18. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.
19. Стеклов В. А. Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня // Сообщ. Харьк. мат. о-ва, сер. 2. 1896. Т. 5, № 3-4. С. 136–181.
20. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983.
21. Showalter R. E. Monotone operators in Banach space and nonlinear differential equation. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. (Math. Surv. Monogr.; V. 49).
22. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
23. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht: VSP, 2003.
24. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
25. Кожанов А. И., Тарасова Г. И. Задача Самарского — Ионкина с интегральным возмущением для псевдопараболического уравнения // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Мат. 2022. Т. 42. С. 59–74.
26. Кожанов А. И., Дюжева А. В. Корректность обобщенной задачи Самарского — Ионкина для эллиптических уравнений в цилиндрической области // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 2. С. 230–242.
27. Кожанов А. И., Ван Минь. Нелокальная задача для обобщенного уравнения Буссинеска — Лява // Сиб. электрон. мат. изв. 2025. Т. 22, № 2. С. 1473–1487.

*Поступила в редакцию 10 марта 2026 г.*

*После доработки 9 апреля 2026 г.*

*Принята к публикации 26 мая 2026 г.*

Кожанов Александр Иванович  
Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090  
kozhanov@math.nsc.ru

Тарасова Галина Ивановна  
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
ул. Белинского, 58, Якутск 677000  
gi-tarasova@mail.ru

## GENERALIZED SAMARSKY—IONKIN PROBLEM FOR SOBOLEV-TYPE EQUATIONS OF ODD ORDER

A. I. Kozhanov and G. I. Tarasova

**Abstract:** The work is investigating the solvability of nonlocal problems with the generalized Samarskii–Ionkin boundary condition for a special class of Sobolev-type equations, namely, for the so-called pseudoparabolic equations. We prove the existence and uniqueness theorems for regular solutions to the problems, i.e., for the solutions that have all generalized by Sobolev derivatives included in the corresponding equations. Moreover, some improvements and generalizations of the obtained results are described.

DOI: 10.25587/2411-9326-2026-2-71-87

**Keywords:** pseudoparabolic equation, nonlocal problem, generalized Samarskii–Ionkin boundary condition, regular solution, existence, uniqueness.

### REFERENCES

1. Ionkin N. I., “Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition,” *Differ. Equ.*, **13**, No. 2, 204–211 (1977).
2. Ionkin N. I., “On the stability of a problem in the theory of heat conduction with a non-classical boundary condition [in Russian],” *Differ. Equ.*, **15**, No. 7, 1284–1295 (1979).
3. Moiseev E. I., “The solution of a nonlocal boundary value problem by the spectral method,” *Differ. Equ.*, **35**, No. 8, 1105–1112 (1999).
4. Beilin S. A., “Existence of solutions for one-dimensional wave equation with nonlocal conditions,” *Electron. J. Differ. Equ.*, **76**, 1–8 (2001).
5. Moiseev E. I., “Solvability of a nonlocal boundary value problem,” *Differ. Equ.*, **37**, 1643–1646 (2001).
6. Kaliev I. A. and Sabitova M. M., “Problems of determining the temperature and density of heat sources from the initial and final temperatures [in Russian],” *J. Appl. Ind. Math.*, **12**, No. 1, 89–97 (2009).
7. Sabitova Yu. K., “Nonlocal initial-boundary-value problems for a degenerate hyperbolic equation,” *Russ. Math.*, **53**, No. 12, 41–49 (2009).
8. Berdyshev A. S., Cabada A., and Kadirkulov B. J., “The Samarskii–Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator,” *Comput. Math. Appl.*, **62**, No. 10, 3884–3893 (2011).
9. Ismailov M. I. and Kanca F., “An inverse coefficient problems for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and overdetermination condition,” *Math. Methods Appl. Sci.*, **34**, No. 6, 692–702 (2011).
10. Sadybekov M. A., “Initial-boundary value problem for a heat equation with not strongly regular boundary conditions,” in: *Functional Analysis in Interdisciplinary Applications, FAIA Symp.*, pp. 330–348 (2017).
11. Sabitov K. B. and Egorova I. P., “On the correctness of boundary value problems for the mixed type equation of the second kind [in Russian],” *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* **23**, No. 3, 430–451 (2019).
12. Yurchuk N. J., “Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations,” *Differ. Equ.*, **22**, 1457–1463 (1986).

13. Nakhushev A. M., Problems with Shifts for Partial Differential Equations [in Russian], Nauka, Moscow 2006.
14. Nakhusheva Z. A., “The Samarskii problem for the fractal diffusion equation,” *Math. Notes*, **95**, 815–819 (2014).
15. Kozhanov A. I., “On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation,” *Differ. Equ.*, **40**, No. 6, 815–826 (2004).
16. Kozhanov A. I., “Nonlocal problems with generalized Samarskii–Ionkin condition for some classes of nonstationary differential equations,” *Dokl. Math.*, **107**, 40–43 (2023).
17. Kozhanov A. I., Nonlocal Problems and Problems with Integral Conditions for Partial Differential Equations [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2024).
18. Samarskii A. A., “On some problems in the theory of differential equations [in Russian],” *Differ. Uravn.*, **16**, No. 11, 1925–1935 (1980).
19. Steklov V. A., “A problem on cooling of a solid,” *Commun. Kharkov Math. Soc.*, **5**, No. 3–4, 136–181 (1897).
20. Steklov V. A., Basic Problems of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1983).
21. Showalter R. E., Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Differential Equation, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1997). (*Math. Surv. Monogr.*; vol. 49).
22. Kozhanov A. I., Composite Type Equations and Inverse Problems, VSP, Utrecht (1999).
23. Sviridyuk G. A. and Fedorov V. E., Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators, VSP, Utrecht (2003).
24. Sveshnikov A. G., Alshin A. B., Korpusov M. O., and Pletner Yu. D., Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2007).
25. Kozhanov A. I. and Tarasova G. I., “The Samarsky–Ionkin problem with integral perturbation for a pseudoparabolic equation [in Russian],” *Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat.*, **42**, 59–74 (2022).
26. Kozhanov A. I. and Dyuzheva A. V., “Well-posedness of the generalized Samarskii–Ionkin problem for elliptic equations in a cylindrical domain [in Russian],” *Differ. Equ.*, **59**, No. 2, 230–242 (2023).
27. Kozhanov A. I. and Van Min, “A nonlocal problem for the generalized Boussinesq–Love equation [in Russian],” *Sib. Electron. Math. Rep.*, **22**, No. 2, 1473–1487 (2025).

*Submitted March 10, 2026*

*Revised April 9, 2026*

*Accepted May 26, 2026*

Alexandr I. Kozhanov  
Novosibirsk State University,  
1 Pirogov Street, Novosibirsk 630090  
[kozhanov@math.nsc.ru](mailto:kozhanov@math.nsc.ru)

Galina I. Tarasova  
North-Eastern Federal University,  
58 Belinsky Street, Yakutsk 677027,  
Republic of Sakha (Yakutia), Russia  
[gi-tarasova@mail.ru](mailto:gi-tarasova@mail.ru)