

УДК 517.955

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СТРОГО ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Г. В. Демиденко, В. С. Нурмахматов

Аннотация. Рассматривается задача Коши для класса строго псевдогиперболических уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами. В этот класс входят, в частности, уравнения Власова, Гальперна, Рэлея — Бишопа. При некоторых условиях на правую часть доказана однозначная разрешимость задачи Коши в весовых соболевских пространствах.

DOI: 10.25587/2411-9326-2026-2-38-54

Ключевые слова: уравнения, не разрешенные относительно старшей производной, псевдогиперболические операторы, энергетические оценки, весовые соболевские пространства.

Посвящается Ивану Егоровичу Егорову
по случаю его 75-летия

1. Введение

В работе рассматривается класс псевдогиперболических уравнений [1] четвертого порядка с переменными вещественнозначными коэффициентами следующего вида:

$$\mathcal{L}(x; D_t, D_x)u \equiv (aI + L_0(x; D_x))D_t^2 u + L_2(x; D_x)u = f(t, x), \quad (1.1)$$

где

$$L_0(x; D_x) = \sum_{q,l=1}^n a_{ql}^0(x) D_{x_q}^2 D_{x_l}^2, \quad L_2(x; D_x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2(x) D_{x_i}^2 D_{x_j}^2 \quad (1.2)$$

— эллиптические операторы. Это уравнение является не разрешенным относительно старшей производной. Впервые систематическое изучение уравнений такого типа проводилось в работах С. Л. Соболева [2], поэтому в литературе уравнения вида (1.1) часто называют *уравнениями соболевского типа* [3, 4].

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке в рамках соглашения № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

© 2026 Демиденко Г. В., Нурмахматов В. С.

2. Основные результаты

Напомним определение псевдогиперболических операторов без младших членов с постоянными коэффициентами [1, гл. 2]:

$$\mathcal{L}(D_t, D_x) = L_0(D_x)D_t^l + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k. \quad (2.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Дифференциальный оператор (2.1) называется *псевдогиперболическим*, если его символ $\mathcal{L}(i\eta, i\xi)$ однороден относительно некоторого вектора $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_0 > 0$, $1/\alpha_j \in N$, т. е.

$$\mathcal{L}(c^{\alpha_0}i\eta, c^{\alpha}i\xi) = c\mathcal{L}(i\eta, i\xi),$$

$L_0(D_x)$ — квазиэллиптический оператор, при этом уравнение

$$(i\eta)^l + \sum_{k=0}^{l-1} (\mathcal{L}_0(i\xi))^{-1} \mathcal{L}_{l-k}(i\xi)(i\eta)^k = 0, \quad \xi \in R^n \setminus \{0\},$$

имеет только вещественные корни $\eta_1(\xi), \eta_2(\xi), \dots, \eta_l(\xi)$. Если корни различные, то оператор называется *строго псевдогиперболическим*.

Для рассматриваемого класса операторов из (1.1)

$$\mathcal{L}(x; D_t, D_x) = (aI + L_0(x; D_x))D_t^2 + L_2(x; D_x) \quad (2.2)$$

будем предполагать, что коэффициенты $a_\alpha^k(x)$ принадлежат $C^6(R^n)$, $k = 0, 2$, в дифференциальных операторах (1.2) постоянные вне некоторого шара $G = \{|x| \leq r\}$ и выполнены оценки

$$\begin{aligned} a_1|\xi|^2 &\geq - \sum_{q,l=1}^n a_{ql}^0(x) \xi_q \xi_l \geq a_0|\xi|^2, \\ a_3|\xi|^4 &\geq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2(x) \xi_i^2 \xi_j^2 \geq a_2|\xi|^4, \quad x, \xi \in R^n, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $a_3 \geq a_2 > 0$, $a_1 \geq a_0 > 0$, $a > 0$ — постоянные. В силу (2.3) для любого $x^0 \in R^n$ оператор

$$L_0(x^0; D_x)D_t^2 + L_2(x^0; D_x),$$

являющийся главной частью оператора (2.2), будет строго псевдогиперболическим, т. е. уравнение

$$L_0(x^0, i\xi)(i\eta)^2 + L_2(x^0, i\xi) = 0, \quad \xi \in R^n \setminus \{0\}, \quad (2.4)$$

имеет только вещественные и различные корни $\eta_1(x^0, \xi), \eta_2(x^0, \xi)$, компоненты вектора однородности $\alpha_k = \frac{1}{4}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оператор вида (2.2) называется *равномерно строго псевдогиперболическим*, если: а) при любом $x^0 \in R^n$ выполняется (2.3); б) найдется константа $\delta > 0$ такая, что при любом $x^0 \in R^n$ имеет место неравенство

$$|\eta_1(x^0, \xi) - \eta_2(x^0, \xi)| \geq \delta|\xi|, \quad \xi \in R^n.$$

Примерами псевдогиперболических операторов четвертого порядка являются оператор Власова [5, 6], оператор Гальперна [7], оператор Рэлея — Бишопы [8, 9].

В дальнейшем символом $W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})$, $\gamma > 0$, будем обозначать соболевское пространство с экспоненциальным весом $e^{-\gamma t}$, т. е. функция $u(t, x)$ принадлежит $W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})$, если

$$u_\gamma(t, x) = e^{-\gamma t} u(t, x) \in W_2^{2,4}(R^{n+1}).$$

По определению положим

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})\| = \|u_\gamma(t, x), W_2^{2,4}(R^{n+1})\|.$$

Символом $\hat{u}_\gamma(\eta, \xi)$ будем обозначать преобразование Фурье функции $u_\gamma(t, x) \in L_2(R^{n+1})$.

Напомним известные результаты о задаче Коши

$$\begin{cases} \mathcal{L}(D_t, D_x)u = f(t, x), & t > 0, x \in R^n, \\ u|_{t=0} = 0, \\ D_t u|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

для строго псевдогиперболического уравнения вида (1.1) с постоянными коэффициентами [10]. А именно, справедлива

Теорема 1. Пусть $f(t, x) \in W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^{n+1})$, $\gamma > 0$. Тогда существует единственная функция $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^{n+1})$ такая, что

$$D_t^2 D_x^\beta u(t, x) \in L_{2,\gamma}(R_+^{n+1}), \quad |\beta| = 2, \quad (2.6)$$

являющаяся решением задачи Коши (2.5), при этом имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|u(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| + \sum_{|\beta|=2} \|D_x^\beta D_t^2 u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| \\ \leq c(\gamma) \|f(t, x), W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^{n+1})\|, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где константа $c(\gamma) > 0$ не зависит от $f(t, x)$.

Доказательство теоремы 1 было основано на использовании интегрального представления решения [1, 10]. Однако этот метод не распространяется на случай переменных коэффициентов.

Цель нашей работы — исследование корректности задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x; D_t, D_x)u = f(t, x), & t > 0, x \in R^n, \\ u|_{t=0} = 0, \\ D_t u|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Для этого будем опираться на энергетические оценки для класса строго псевдогиперболических операторов четвертого порядка с переменными коэффициентами, установленные в наших работах [11, 12]. А именно, справедлива следующая

Теорема 2. Существует $\gamma_0 > 0$ такое, что для любой функции $u(t, x) \in C_0^\infty(R^{n+1})$ и для оператора (2.2) при $\gamma > \gamma_0$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \gamma \|(|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(R^{n+1})\| \\ \leq c \|\mathcal{L}(x; D_t, D_x)u(t, x), L_{2,\gamma}(R^{n+1})\| \end{aligned} \quad (2.9)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $u(t, x)$ и γ .

Оценка (2.9) является аналогом энергетических неравенств для строго гиперболических операторов с переменными коэффициентами [13, 14].

Введем обозначение

$$\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)u_\gamma = (aI + L_0(x; D_x))(D_t + \gamma)^2 u_\gamma + L_2(x; D_x)u_\gamma. \quad (2.10)$$

Через $\mathcal{L}_\gamma^*(x; D_t, D_x)u_\gamma$ будем записывать сопряженный оператор, т. е.

$$\mathcal{L}_\gamma^*(x; D_t, D_x)u_\gamma = (aI + L_0^*(x; D_x))(D_t - \gamma)^2 u_\gamma + L_2^*(x; D_x)u_\gamma. \quad (2.11)$$

Проводя рассуждения, как при доказательстве теоремы 2, для сопряженного оператора $\mathcal{L}_\gamma^*(x, D_t, D_x)$ получим следующее утверждение.

Следствие 1. Существует $\gamma_1 > \gamma_0$ такое, что для любой функции $u(t, x) \in C_0^\infty(R^{n+1})$ при $\gamma > \gamma_1$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \gamma \|(|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(R^{n+1})\| \\ \leq c \|\mathcal{L}_\gamma^*(x; D_t, D_x)u_\gamma(t, x), L_2(R^{n+1})\| \end{aligned} \quad (2.12)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $u(t, x)$.

Энергетические оценки вида (2.9) и (2.12) будем использовать для изучения корректности задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений с переменными коэффициентами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{1,3}(R^{n+1})$ такая, что $D_x^\alpha D_t u(t, x) \in L_{2,\gamma}(R^{n+1})$, $|\alpha| = 2$, называется *обобщенным решением уравнения* (1.1) при $f(t, x) \in L_{2,\gamma}(R^{n+1})$, если для любой функции $\Phi(t, x) \in C_0^\infty(R^{n+1})$ имеет место интегральное соотношение

$$\int_{R^{n+1}} u_\gamma(t, x) \mathcal{L}_\gamma^*(x; D_t, D_x) \Phi(t, x) d\bar{x} = \int_{R^{n+1}} f_\gamma(t, x) \Phi(t, x) d\bar{x}, \quad \bar{x} = (t, x). \quad (2.13)$$

Теорема 3. Пусть $f(t, x) \in L_{2,\gamma}(R^{n+1})$, $\gamma > \gamma_1$. Тогда существует единственное обобщенное решение уравнения (1.1) и для него имеет место оценка

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{1,3}(\mathbb{R}^{n+1})\| + \sum_{|\beta|=2} \|D_x^\beta D_t u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\| \leq \frac{c}{\gamma} \|f(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\|, \quad (2.14)$$

где $c > 0$ не зависит от $f(t, x)$.

Ниже проведем доказательство теоремы 3 по аналогии с [15, гл. 4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{1,3}(R^{n+1})$ такая, что $D_x^\alpha D_t u(t, x) \in L_{2,\gamma}(R^{n+1})$, $|\alpha| = 2$, называется *обобщенным решением задачи Коши* (2.8) при $f(t, x) \in L_{2,\gamma}(R^{n+1})$, если $u_\gamma(t, x)$ является решением уравнения (1.1) и $\text{supp } u \subset R_+^{n+1}$.

Из сформулированных результатов вытекает следующая

Теорема 4. Пусть $\mathcal{L}(x; D_t, D_x)$ — равномерно псевдогиперболический оператор. Тогда существуют $\gamma_2 \geq \gamma_1$, $a^* > 0$ такие, что при $f(t, x) \in L_{2,\gamma}(R^{n+1})$, $f(t, x) = 0$, $t < 0$, $\gamma > \gamma_2$, $a, a_0, a_2 \geq a^*$ задача Коши (2.8) имеет единственное обобщенное решение $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{1,3}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $\gamma > \gamma_2$, при этом справедлива оценка

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{1,3}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| + \sum_{|\beta|=2} \|D_x^\beta D_t u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| \leq \frac{c}{\gamma} \|f(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\|, \quad (2.15)$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от $f(t, x)$.

Сформулируем основное утверждение о сильном решении задачи (2.8).

Теорема 5. Пусть $\mathcal{L}(x; D_t, D_x)$ — равномерно псевдогиперболический оператор. Тогда существует $\gamma_3 \geq \gamma_2$ такое, что при любой $f(t, x) \in W_{2,\gamma}^{1,1}(R_+^{n+1})$, $\gamma > \gamma_3$, $f(t, x)|_{t=0} = 0$, обобщенное решение $u(t, x)$ задачи Коши (2.8) принадлежит $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^{n+1})$, выполнено (2.6) и $u(t, x)$ является сильным решением задачи, при этом имеет место оценка

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| + \sum_{|\beta|=2} \|D_x^\beta D_t^2 u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| \leq c(\gamma) \|f(t, x), W_{2,\gamma}^{1,1}(\mathbb{R}_+^{n+1})\|, \quad (2.16)$$

где константа $c(\gamma_3) > 0$ не зависит от $f(t, x)$.

3. Доказательство теоремы 3

Доказательство существования обобщенного решения опирается на теорему Рисса и теорему Хана — Банаха (см., например, [16]).

Определим $\mathcal{M}$ — линейное многообразие в $L_2(R^{n+1})$ — следующим образом:

$$\mathcal{L}_\gamma^*(x, D_t, D_x) : C_0^\infty(R^{n+1}) \rightarrow \mathcal{M},$$

где $\gamma > \gamma_1$ фиксировано. Тогда для любой $\Psi(t, x) \in \mathcal{M}$ вспомогательное уравнение

$$\mathcal{L}_\gamma^*(x, D_t, D_x) \Phi(t, x) = \Psi(t, x)$$

имеет единственное решение $\Phi(t, x) \in C_0^\infty(R^{n+1})$. Оценка решения вытекает из (2.12), а именно

$$\|\Phi(t, x), L_2(R^{n+1})\| \leq \frac{c}{\gamma} \|\Psi(t, x), L_2(R^{n+1})\|. \quad (3.1)$$

Из определения $\mathcal{M}$ решение вспомогательного уравнения представляется в виде

$$\Phi(t, x) = (\mathcal{L}_\gamma^*(x, D_t, D_x))^{-1} \Psi(t, x). \quad (3.2)$$

Теперь рассмотрим интеграл в правой части (2.13). Учитывая (3.2), его будем записывать в следующем виде:

$$\begin{aligned} I(f_\gamma(t, x), \Phi(t, x)) &= \int_{R^{n+1}} f_\gamma(t, x) \Phi(t, x) d\bar{x} \\ &= \int_{R^{n+1}} f_\gamma(t, x) (\mathcal{L}_\gamma^*(x, D_t, D_x))^{-1} \Psi(t, x) d\bar{x}. \end{aligned}$$

Пусть $f_\gamma(t, x) \in L_2(R^{n+1})$ фиксировано. Рассмотрим функционал

$$\mathcal{A}\Psi = \int_{R^{n+1}} f_\gamma(t, x) (\mathcal{L}_\gamma^*(x, D_t, D_x))^{-1} \Psi(t, x) d\bar{x}.$$

Так как

$$|I(f_\gamma(t, x), \Phi(t, x))| \leq \|f_\gamma(t, x), L_2(R^{n+1})\| \|\Phi(t, x), L_2(R^{n+1})\|,$$

то, учитывая оценку (3.1), имеем

$$|\mathcal{A}\Psi| \leq \frac{c}{\gamma} \|f_\gamma(t, x), L_2(R^{n+1})\| \|\Psi(t, x), L_2(R^{n+1})\|.$$

Поэтому при фиксированном $f_\gamma(t, x) \in L_2(R^{n+1})$ функционал $\mathcal{A}$ является линейным и непрерывным на $\mathcal{M} \subset L_2(R^{n+1})$. Тогда по теореме Хана — Банаха существует линейный непрерывный функционал $\widetilde{\mathcal{A}}$ на $L_2(R^{n+1})$, являющийся продолжением функционала $\mathcal{A}$, при этом для его нормы выполнена оценка

$$\|\widetilde{\mathcal{A}}\| \leq \frac{c}{\gamma} \|f_\gamma(t, x), L_2(R^{n+1})\|.$$

В силу теоремы Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве существует единственная функция $U(t, x) \in L_2(R^{n+1})$ такая, что

$$\widetilde{\mathcal{A}}\Psi = \int_{R^{n+1}} U(t, x) \Psi(t, x) d\bar{x}$$

для любой $\Psi \in L_2(R^{n+1})$. Но тогда при любых $\Phi(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\int_{R^{n+1}} U(t, x) \Psi(t, x) d\bar{x} = \int_{R^{n+1}} f_\gamma(t, x) \Phi(t, x) d\bar{x}$$

при $\Psi(t, x) = \mathcal{L}_\gamma^*(x, D_t, D_x) \Phi(t, x) \in \mathcal{M} \subset L_2(R^{n+1})$. Следовательно, полагая $u(t, x) = e^{\gamma t} U(t, x)$, видим, что для любых $\Phi \in C_0^\infty(R^{n+1})$ выполняется (2.13).

Покажем, что найденная функция $u(t, x)$ принадлежит анизотропному соболевскому пространству $W_{2,\gamma}^{1,3}(R^{n+1})$, при этом существуют обобщенные производные $D_x^\beta D_t u \in L_{2,\gamma}(R^{n+1})$, $|\beta| = 2$, и имеет место оценка (2.14).

Поскольку $a_\alpha^k(x) \in C^6(R^n)$, для построения приближенного обобщенного решения уравнения (1.1) воспользуемся следующим характерным свойством средних функций (см., например, [15, гл. 1]).

Лемма 3.1. Для любой функции $u(t, x) \in L_{2,\gamma}(R^{n+1})$ при $h \rightarrow 0$ имеет место сходимость

$$\sum_{|\alpha| \leq 4} \left\| \int_{R^{n+1}} D_y^\alpha ([a_\alpha^k(x) - a_\alpha^k(y)] \omega_h(\bar{x} - \bar{y})) u_\gamma(\bar{y}) d\bar{y}, L_2(R^{n+1}) \right\| \rightarrow 0, \quad (3.3)$$

где $\bar{y} = (\tau, y)$, $k = 0, 2$.

Лемма 3.2. Для функции $u(t, x) = e^{\gamma t} U(t, x) \in L_{2, \gamma}(R^{n+1})$ имеет место сходимость

$$\|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_h(t, x) - f_\gamma(t, x), L_2(R^{n+1})\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \quad (3.4)$$

где $(u_\gamma)_h$ — усреднение функции u_γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определений операторов (1.2) и определения усредняющего ядра получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_h &= \int_{R^{n+1}} [(aI + L_0(x; D_y))(D_\tau - \gamma)^2 \\ &\quad + L_2(x; D_y))\omega_h(\bar{x} - \bar{y})] u_\gamma(\bar{y}) d\bar{y}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Покажем, что

$$(f_\gamma)_h(t, x) = \int_{R^{n+1}} [(aI + L_0^*(y; D_y))(D_\tau - \gamma)^2 + L_2^*(y; D_y))\omega_h(\bar{x} - \bar{y})] u_\gamma(\bar{y}) d\bar{y}. \quad (3.6)$$

Поскольку $u \in L_{2, \gamma}(R^{n+1})$ удовлетворяет (2.13) для любой $\varphi(t, x) \in C_0^\infty(R^{n+1})$, то для средней функции $\varphi_h(t, x)$ имеем

$$J_h = \int_{R^{n+1}} f_\gamma(\bar{x}) \varphi_h(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{R^{n+1}} u_\gamma(\bar{y}) \mathcal{L}_\gamma^*(y; D_\tau, D_y) \varphi_h(\bar{y}) d\bar{y}, \quad (3.7)$$

или в силу свойств средней функции

$$J_h = \int_{R^{n+1}} (f_\gamma)_h(\bar{x}) \varphi(\bar{x}) d\bar{x}, \quad (3.8)$$

а также

$$\mathcal{L}_\gamma^*(y; D_\tau, D_y) \varphi_h(\bar{y}) = \int_{R^{n+1}} \mathcal{L}_\gamma^*(y; D_\tau, D_y) \omega_h(\bar{x} - \bar{y}) \varphi(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Подставляя это выражение в (3.7), в силу теоремы Фубини имеем

$$J_h = \int_{R^{n+1}} \int_{R^{n+1}} \mathcal{L}_\gamma^*(y; D_\tau, D_y) \omega_h(\bar{x} - \bar{y}) u_\gamma(\bar{y}) d\bar{y} \varphi(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Тогда в силу (3.7), (3.8) и по лемме дю-Буа-Реймонда получаем (3.6).

Следовательно, учитывая явные выражения для $\mathcal{L}(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_h(t, x)$, $(f_\gamma)_h(t, x)$, в силу свойств средних функций имеем

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{L}(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_h - (f_\gamma)_h, L_2(R^{n+1})\| \\ &= \left\| \int_{R^{n+1}} \left(\sum_{l, q=1}^n D_{y_l y_q}^2 ([a_{lq}^0(x) - a_{lq}^0(y)] (D_\tau - \gamma)^2 \omega_h(\bar{x} - \bar{y})) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i, j=1}^n D_{y_i}^2 D_{y_j}^2 ([a_{ij}(x) - a_{ij}(y)] \omega_h(\bar{x} - \bar{y})) \right) u_\gamma(\bar{y}) d\bar{y}, L_2(R^{n+1}) \right\|. \end{aligned}$$

В силу леммы 3.1

$$\|\mathcal{L}(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_h - (f_\gamma)_h, L_2(R^{n+1})\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0,$$

а поскольку

$$\|(f_\gamma)_h - f_\gamma, L_2(R^{n+1})\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0,$$

то лемма доказана.

Лемма 3.3. Пусть $u \in L_{2,\gamma}(R^{n+1})$ удовлетворяет соотношениям (2.13). Тогда существует последовательность $\{u_\gamma^m\}$, $u_\gamma^m \in C_0^\infty(R^{n+1})$, такая, что

$$\|u_\gamma^m(t, x) - u_\gamma(t, x), L_2(R^{n+1})\| \rightarrow 0, \quad (3.9)$$

$$\|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)u_\gamma^m(t, x) - f_\gamma(t, x), L_2(R^{n+1})\| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию $\Upsilon(t) \in C_0^\infty(R)$:

$$\Upsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |t| \geq 2, \end{cases} \quad 0 \leq \Upsilon(t) \leq 1.$$

Положим $\bar{x} = (t, x)$,

$$u_\gamma^{h,r}(\bar{x}) = \Upsilon\left(\frac{|\bar{x}|^2}{r^2}\right)(u_\gamma)_h(\bar{x}) \in C_0^\infty(R^{n+1}),$$

где $(u_\gamma)_h(\bar{x})$ — усреднение функции $u_\gamma(\bar{x})$.

Очевидно, имеем

$$\begin{aligned} \|u_\gamma^{h,r} - (u_\gamma)_h, L_2(R^{n+1})\| &= \left\| \left(\Upsilon\left(\frac{|\bar{x}|^2}{r^2}\right) - 1 \right) (u_\gamma)_h(\bar{x}), L_2(R^{n+1}) \right\| \\ &\leq \|(u_\gamma)_h(\bar{x}), L_2(|\bar{x}| > r)\| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Так как

$$\|u_\gamma^{h,r} - u_\gamma, L_2(R^{n+1})\| \leq \|u_\gamma^{h,r} - (u_\gamma)_h, L_2(R^{n+1})\| + \|(u_\gamma)_h - u_\gamma, L_2(R^{n+1})\|,$$

то

$$\|u_\gamma^{h,r} - u_\gamma, L_2(R^{n+1})\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)u_\gamma^{h,r}(\bar{x}) - \mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_h(\bar{x}), L_2(R^{n+1})\| \\ &\leq \left\| \left(\Upsilon\left(\frac{|\bar{x}|^2}{r^2}\right) - 1 \right) \mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_h(\bar{x}), L_2(R^{n+1}) \right\| \\ &+ \left\| \sum_{i=1}^n \frac{2x_i}{r^2} \mathcal{L}'_\gamma(x, D_z \Upsilon(z)|_{z=\frac{|\bar{x}|^2}{r^2}}; D_t, D_x)u_\gamma^h(t, x), L_2(\sqrt{2}r > |\bar{x}| > r) \right\|, \end{aligned}$$

где порядок оператора $\mathcal{L}'_\gamma(x, D_z \Upsilon(z)|_{z=\frac{|\bar{x}|^2}{r^2}}; D_t, D_x)$ не выше трех. По определению функции $\Upsilon\left(\frac{|\bar{x}|^2}{r^2}\right)$ имеем

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)u_\gamma^{h,r}(t, x) - \mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_h(t, x), L_2(R^{n+1})\| \\ &\leq \|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_h(t, x), L_2(|\bar{x}| > r)\| \\ &+ \frac{c}{r} \|\mathcal{L}'_\gamma(x, D_z \Upsilon(z)|_{z=\frac{|\bar{x}|^2}{r^2}}; D_t, D_x)(u_\gamma(t, x))_h, L_2(\sqrt{2}r > |\bar{x}| > r)\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $r \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)u_\gamma^{h,r} - f_\gamma(t, x), L_2(R^{n+1})\|$$

$$\begin{aligned} &\leq \|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)u_\gamma^{h,r} - \mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_h, L_2(R^{n+1})\| \\ &+ \|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_h - f_\gamma(t, x), L_2(R^{n+1})\| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Определив теперь последовательность $\{u_\gamma^m(t, x)\}$, где

$$u_\gamma^m(t, x) = u_\gamma^{1/m, m}(t, x) \in C_0^\infty(R^{n+1}),$$

получаем (3.9) и (3.10).

Лемма доказана.

Лемма 3.4. Функция $u(t, x) = e^{\gamma t}U(t, x)$ принадлежит $W_{2,\gamma}^{1,3}(R^{n+1})$, при этом существуют обобщенные производные

$$D_x^\beta D_t u(t, x) \in L_{2,\gamma}(R^{n+1}), \quad |\beta| = 2,$$

и имеет место сходимость

$$\|u_\gamma^m(t, x) - u_\gamma(t, x), W_{2,\gamma}^{1,3}(R^{n+1})\| \rightarrow 0, \quad (3.11)$$

$$\sum_{|\beta|=2} \|D_x^\beta D_t u_\gamma^m(t, x) - D_x^\beta D_t u_\gamma(t, x), L_2(R^{n+1})\| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что последовательность $\{u_\gamma^m(\bar{x})\}$ и последовательность производных $\{D_x^\beta D_t u_\gamma^m(\bar{x})\}$, $|\beta| = 2$, фундаментальны в $W_{2,\gamma}^{1,3}(R^{n+1})$ и $L_{2,\gamma}(R^{n+1})$ соответственно.

В силу оценки вида (2.9) имеем

$$\begin{aligned} &\gamma \|(a + |\xi|^2)(|\eta| + \gamma + |\xi|)(\widehat{u}_\gamma^{m_1} - \widehat{u}_\gamma^{m_2}), L_2(R^{n+1})\| \\ &\leq c \|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)u_\gamma^{m_1} - \mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)u_\gamma^{m_2}, L_2(R^{n+1})\| \\ &= c \|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)u_\gamma^{m_1} \pm \mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_{h_1} \\ &\pm \mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_{h_2} - \mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)u_\gamma^{m_2} \pm (f_\gamma)_{h_1} \pm (f_\gamma)_{h_2}, L_2(R^{n+1})\|. \end{aligned}$$

где $h_1 = \frac{1}{m_1}$, $r_1 = m_1$, $h_2 = \frac{1}{m_2}$, $r_2 = m_2$. Используя неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned} &\gamma \|(a + |\xi|^2)(|\eta| + \gamma + |\xi|)(\widehat{u}_\gamma^{m_1} - \widehat{u}_\gamma^{m_2}), L_2(R^{n+1})\| \\ &\leq c(\|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)u_\gamma^{m_1} - \mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_{h_1}, L_2(R^{n+1})\| \\ &\quad + \|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_{h_1} - (f_\gamma)_{h_1}, L_2(R^{n+1})\| \\ &\quad + \|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)u_\gamma^{m_2} - \mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_{h_2}, L_2(R^{n+1})\| \\ &\quad + \|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)(u_\gamma)_{h_2} - (f_\gamma)_{h_2}, L_2(R^{n+1})\| \\ &\quad + \|(f_\gamma)_{h_1} - (f_\gamma)_{h_2}, L_2(R^{n+1})\|) \rightarrow 0, \quad m_1, m_2 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тогда последовательность $\{u_\gamma^m(\bar{x})\}$ фундаментальна в $W_{2,\gamma}^{1,3}(R^{n+1})$, а последовательность $\{D_x^\beta D_t u_\gamma^m(\bar{x})\}$, $|\beta| = 2$, фундаментальна в $L_{2,\gamma}(R^{n+1})$. Отсюда приходим к (3.11) и (3.12).

Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает, что $u(t, x) = e^{\gamma t}U(t, x)$ является обобщенным решением уравнения (1.1) и для него, очевидно, получаем

$$\begin{aligned} \|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\widehat{u}_\gamma, L_2(R^{n+1})\| &\leq \|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)(\widehat{u}_\gamma^m - \widehat{u}_\gamma), L_2(R^{n+1})\| \\ &\quad + \|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\widehat{u}_\gamma^m, L_2(R^{n+1})\| \\ &\leq \|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)(\widehat{u}_\gamma^m - \widehat{u}_\gamma), L_2(R^{n+1})\| \\ &\quad + \frac{c}{\gamma} \|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)u_\gamma^m, L_2(R^{n+1})\| \\ &\leq \|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)(\widehat{u}_\gamma^m - \widehat{u}_\gamma), L_2(R^{n+1})\| + \frac{c}{\gamma} \|f_\gamma, L_2(R^{n+1})\| \\ &\quad + \frac{c}{\gamma} \|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)u_\gamma^m - f_\gamma, L_2(R^{n+1})\|. \end{aligned}$$

Следовательно, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ и учитывая (3.10)–(3.12), получаем оценку (2.14). Единственность обобщенного решения доказывается по аналогии с [15, гл. 4].

Теорема 3 доказана.

4. Разрешимость задачи Коши

Для доказательства теоремы 4 нам понадобятся три леммы.

Введем новое обозначение $\widetilde{u}_\gamma(t, \xi) \in L_2(R^{n+1})$ для частичного преобразования Фурье по x функции $u_\gamma(t, x) \in L_2(R^{n+1})$.

Лемма 4.1. *Существует константа $\bar{a} > 0$ такая, что при $a, a_0, a_2 > \bar{a}$ для любой функции $u_\gamma(t, x) \in C_0^\infty(R^{n+1})$ справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} c_1 \int_{R^n} (1+|\xi|^2)^3 |\widetilde{u}_\gamma(t, \xi)|^2 dx &\leq \int_{R^n} ((a+L_0(x; D_x))u_\gamma)^2 dx \\ &\quad + \int_{R^n} (a+L_0(x; D_x))u_\gamma L_2(x; D_x)u_\gamma dx, \quad t \in R, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где константа $c_1 = c_1(\bar{a}) > 0$ не зависит от функции $u_\gamma(t, x)$.

Доказательство леммы можно получить, используя неравенство Гординга (см., например, [17]).

Лемма 4.2. *Существует $\gamma_2 > \gamma_1$ такое, что для любой функции $u \in C_0^\infty(R^{n+1})$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \|(a+|\xi|^2)(D_t+\gamma)\widetilde{u}_\gamma(t, \xi), L_2((-\infty, 0) \times \mathbb{R}^n)\| &+ \|(1+|\xi|^3)\widetilde{u}_\gamma(t, \xi), L_2((-\infty, 0) \times \mathbb{R}^n)\| \\ &\leq \frac{c}{\gamma} \|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x)u_\gamma(t, x), L_2((-\infty, 0) \times R^n)\|, \quad \gamma > \gamma_2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где константа c не зависит от функции $u_\gamma(t, x)$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} l_1(t) &= \int_{R^n} ((a+L_0(x; D_x))(D_t+\gamma)u_\gamma(t, x))^2 dx \\ &\quad + 2 \int_{R^n} L_2(x; D_x)u_\gamma(t, x)(aI + L_0(x; D_x))u_\gamma(t, x) dx. \end{aligned}$$

Дифференцируя его по t , имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}l_1(t) &= 2 \int_{R^n} (a + L_0(x; D_x))(D_t + \gamma)D_t u_\gamma(t, x)(a + L_0(x; D_x))(D_t + \gamma)u_\gamma(t, x) dx \\ &\quad + 2 \int_{R^n} L_2(x; D_x)u_\gamma(t, x)(aI + L_0(x; D_x))D_t u_\gamma(t, x) dx \\ &\quad + 2 \int_{R^n} L_2(x; D_x)D_t u_\gamma(t, x)(aI + L_0(x; D_x))u_\gamma(t, x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно получить

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}l_1(t) + 2\gamma l_1(t) - 2 \int_{R^n} L_2(x; D_x)D_t u_\gamma(aI + L_0(x; D_x))u_\gamma dx \\ = 2 \int_{R^n} \mathcal{L}(x; D_t + \gamma, D_x)u_\gamma(a + L_0(x; D_x))(D_t + \gamma)u_\gamma dx. \quad (4.3) \end{aligned}$$

В силу определения оператора $L_2(x, D_x)$ в (1.2) его можно представить в виде

$$L_2(x, D_x)u_\gamma = \sum_{i,j=1}^n D_{x_i x_j}^2 (a_{ij}(x)D_{x_i x_j}^2 u_\gamma) + L_3(x, D_x)u_\gamma,$$

где $L_3(x, D_x)$ — дифференциальный оператор 3-го порядка.

Учитывая гладкость коэффициентов, определение операторов (1.2) и финитность функции $u(t, x)$, (4.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}l_1(t) + 2\gamma l_1(t) - \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} a a_{ij}(x) D_t [(D_{x_i x_j}^2 u_\gamma)^2] dx \\ + 2 \sum_{l,q=1}^n \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} a_{lq}^0(x) a_{ij}(x) D_t D_{x_i x_j}^2 u_\gamma D_{x_l x_q}^2 D_{x_i x_j}^2 u_\gamma dx \\ + 2 \sum_{l,q=1}^n \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} L_3(x, D_x)u_\gamma \left(aI + \sum_{l,q=1}^n a_{lq}^0(x) D_{x_l x_q}^2 u_\gamma \right) dx \\ + 2 \sum_{l,q=1}^n \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} a_{ij}(x) D_t D_{x_i x_j}^2 u_\gamma (D_{x_i} a_{lq}^0(x) D_{x_j} D_{x_l x_q}^2 u_\gamma + D_{x_j} a_{lq}^0(x) D_{x_i} D_{x_l x_q}^2 u_\gamma \\ + D_{x_i x_j}^2 a_{lq}^0(x) D_{x_l x_q}^2 u_\gamma) dx \\ = 2 \int_{R^n} (a + L_0(x; D_x))(D_t + \gamma)^2 u_\gamma (a + L_0(x; D_x))(D_t + \gamma)u_\gamma dx. \end{aligned}$$

Используя формулу

$$2D_{x_l x_q}^2 uu_t = -D_t(D_{x_l}u D_{x_q}u) + D_{x_l}(D_{x_q}uu_t) + D_{x_q}(D_{x_l}uu_t),$$

имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} l_1(t) + 2\gamma l_1(t) - \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} a a_{ij}(x) D_t [(D_{x_i x_j}^2 u_\gamma)^2] dx \\
& - \sum_{l,q=1}^n \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} a_{lq}^0(x) a_{ij}(x) D_t (D_{x_l x_i x_j}^3 u_\gamma D_{x_q x_i x_j}^3 u_\gamma) dx \\
& + \sum_{l,q=1}^n \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} a_{lq}^0(x) a_{ij}(x) D_{x_q} (D_{x_l x_i x_j}^3 u_\gamma D_{x_i x_j}^2 D_t u_\gamma) dx \\
& + \sum_{l,q=1}^n \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} a_{lq}^0(x) a_{ij}(x) D_{x_l} (D_{x_q x_i x_j}^3 u_\gamma D_{x_i x_j}^2 D_t u_\gamma) dx \\
& + \sum_{l,q=1}^n \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} L_3(x, D_x) u_\gamma \left(aI + \sum_{l,q=1}^n a_{lq}^0(x) D_{x_q x_l}^2 u_\gamma \right) dx \\
& + \sum_{l,q=1}^n \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} a_{ij}(x) D_t D_{x_i x_j}^2 u_\gamma (D_{x_i} a_{lq}^0(x) D_{x_j} D_{x_l x_q}^2 u_\gamma + D_{x_j} a_{lq}^0(x) D_{x_i} D_{x_l x_i}^2 u_\gamma \\
& \quad + D_{x_i x_j}^2 a_{lq}^0(x) D_{x_l x_q}^2 u_\gamma) dx \\
& = 2 \int_{R^n} (a + L_0(x; D_x)) (D_t + \gamma)^2 u_\gamma (a + L_0(x; D_x)) (D_t + \gamma) u_\gamma dx.
\end{aligned}$$

Интегрируя его от $-\infty$ до 0, учитывая формулу Гаусса — Остроградского и финитность функции $u_\gamma(t, x)$, получим

$$\begin{aligned}
& 2\gamma \int_{-\infty}^0 l_1(t) dt + l_1(0) - \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} a a_{ij}(x) (D_{x_i x_j}^2 u_\gamma)^2|_{t=0} dx \\
& - \sum_{l,q=1}^n \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} a_{lq}^0(x) a_{ij}(x) (D_{x_l x_i x_j}^3 u_\gamma D_{x_q x_i x_j}^3 u_\gamma)|_{t=0} dx \\
& + \sum_{l,q=1}^n \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} D_{x_q} (a_{lq}^0(x) a_{ij}(x)) D_{x_l x_i x_j}^3 u_\gamma D_{x_i x_j}^2 D_t u_\gamma dx \\
& + \sum_{l,q=1}^n \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} D_{x_l} (a_{lq}^0(x) a_{ij}(x)) D_{x_q x_i x_j}^3 u_\gamma D_{x_i x_j}^2 D_t u_\gamma dx \\
& + \sum_{l,q=1}^n \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} L_3(x, D_x) u_\gamma \left(aI + \sum_{l,q=1}^n a_{lq}^0(x) D_{x_q x_l}^2 u_\gamma \right) dx \\
& + \sum_{l,q=1}^n \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} a_{ij}(x) D_t D_{x_i x_j}^2 u_\gamma (D_{x_i} a_{lq}^0(x) D_{x_j} D_{x_l x_q}^2 u_\gamma + D_{x_j} a_{lq}^0(x) D_{x_i} D_{x_l x_i}^2 u_\gamma \\
& \quad + D_{x_i x_j}^2 a_{lq}^0(x) D_{x_l x_q}^2 u_\gamma) dx
\end{aligned}$$

$$= 2 \int_{R^n} (a + L_0(x; D_x))(D_t + \gamma)^2 u_\gamma (a + L_0(x; D_x))(D_t + \gamma) u_\gamma dx.$$

В силу леммы 4.1 будем иметь

$$\begin{aligned} & \gamma \left(c_1 \int_{-\infty}^0 \int_{R^n} (a + |\xi|^2)^2 |(D_t + \gamma) \tilde{u}_\gamma(t, \xi)|^2 d\xi dt + c_2 \int_{-\infty}^0 \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^3 |\tilde{u}_\gamma(t, \xi)|^2 d\xi dt \right) \\ & + \int_{-\infty}^0 \int_{R^n} \sum_{|\alpha| \leq 2} b_\alpha^0(x) D_x^\alpha D_t u_\gamma \sum_{|\alpha| \leq 3} b_\alpha^1(x) D_x^\alpha u_\gamma dx dt \\ & \leq 2 \int_{-\infty}^0 \int_{R^n} \mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x) u_\gamma (a + L_0(x; D_x))(D_t + \gamma) u_\gamma dx dt, \end{aligned}$$

где c_1, c_2 — константы, не зависящие от $\tilde{u}_\gamma(t, x)$ и γ .

В силу гладкости коэффициентов существует $\gamma \geq \gamma_2$ такое, что выполняется оценка

$$\begin{aligned} & \gamma c_3 \left(\int_{-\infty}^0 \int_{R^n} (a + |\xi|^2)^2 |(D_t + \gamma) \tilde{u}_\gamma(t, \xi)|^2 d\xi dt + \int_{-\infty}^0 \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^3 |\tilde{u}_\gamma(t, \xi)|^2 d\xi dt \right) \\ & \leq 2 \int_{-\infty}^0 \int_{R^n} \mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x) v_\gamma (a + L_0(x; D_x))(D_t + \gamma) u_\gamma dx dt, \end{aligned}$$

где c_3 не зависит от функции $u_\gamma(t, x)$ и γ . Отсюда, очевидно, вытекает неравенство (4.2).

Лемма доказана.

Лемма 4.3. Предположим, что $f \in L_{2,\gamma}(R^{n+1})$, $\gamma > \gamma_2$, $f(t, x) \equiv 0$ при $t < 0$ и $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{1,3}(R^{n+1})$ такая, что $D_x^\alpha D_t u(t, x) \in L_{2,\gamma}(R^{n+1})$, $|\alpha| = 2$ — обобщенное решение уравнение (1.1). Тогда при почти всех $t < 0$

$$\|(a + |\xi|^2)(D_t + \gamma) \tilde{u}_\gamma(t, \xi), L_2(R^n)\| + \|(1 + |\xi|^3) \tilde{u}_\gamma(t, \xi), L_2(R^n)\| = 0. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию леммы из (3.12) вытекает, что

$$\|\mathcal{L}_\gamma(x; D_t, D_x) u_\gamma^m(t, x), L_2((-\infty, 0) \times R^n)\| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Тогда из неравенства (4.2) следует, что

$$\begin{aligned} & \|(a + |\xi|^2)(D_t + \gamma) \tilde{u}_\gamma^m(t, \xi), L_2((-\infty, 0) \times R^n)\| \\ & + \|(1 + |\xi|^3) \tilde{u}_\gamma^m(t, \xi), L_2((-\infty, 0) \times R^n)\| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу (3.11) имеем

$$\|(a + |\xi|^2)(D_t + \gamma) \tilde{u}_\gamma(t, \xi), L_2((-\infty, 0) \times R^n)\|$$

$$\begin{aligned}
& + \|(1 + |\xi|^3)\tilde{u}_\gamma(t, \xi), L_2((-\infty, 0) \times \mathbb{R}^n)\| \leq \\
& \|(a + |\xi|^2)(D_t + \gamma)(\tilde{u}_\gamma(t, \xi) - \tilde{u}_\gamma^m(t, \xi)), L_2((-\infty, 0) \times \mathbb{R}^n)\| \\
& + \|(1 + |\xi|^3)(\tilde{u}_\gamma(t, \xi) - \tilde{u}_\gamma^m(t, \xi)), L_2((-\infty, 0) \times \mathbb{R}^n)\| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем равенство

$$\begin{aligned}
& \|(a + |\xi|^2)(D_t + \gamma)\tilde{u}_\gamma(t, \xi), L_2((-\infty, 0) \times \mathbb{R}^n)\| \\
& + \|(1 + |\xi|^3)\tilde{u}_\gamma(t, \xi), L_2((-\infty, 0) \times \mathbb{R}^n)\| = 0,
\end{aligned}$$

из которого вытекает (4.14).

Лемма доказана.

Из леммы 4.3 и неравенства (2.14) следует оценка (2.15).

Теорема 4 доказана.

Докажем теперь теорему 5.

Для того чтобы доказать эту теорему достаточно получить оценку (2.16).

Напомним, что при доказательстве энергетической оценки из теоремы 2 в [11, 12] использовалась следующая форма:

$$Mu = -Im \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\gamma t} \mathcal{L}(x; D_t, D_x) u(t, x) \overline{e^{-\gamma t} \mathcal{L}^1(x; D_t, D_x) u(t, x)} d\bar{x}, \quad (4.5)$$

где

$$\mathcal{L}^1(x, D_t, D_x) u(t, x) = 2i(aI + L_0(x; D_x))D_t u(t, x), \quad u(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).$$

По аналогии с [11, 12] нетрудно получить неравенство следующего вида:

$$\gamma \|(|\xi|(|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1}))\| \leq c_1 \|f(t, x), W_{2,\gamma}^{1,1}(\mathbb{R}^{n+1})\|, \quad (4.6)$$

где $c_1 > 0$ — константа, не зависящая от $f(t, x)$ и γ .

Для этого вместо формы (4.5) рассмотрим

$$\mathcal{M}_1 u = Im \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\gamma t} \Delta \mathcal{L}(x; D_t, D_x) u(t, x) \overline{e^{-\gamma t} \mathcal{L}^1(x; D_t, D_x) u(t, x)} d\bar{x}.$$

Затем, повторяя доказательство теоремы 2 из [11, 12], получим (4.6).

Аналогичным образом получается оценка

$$\gamma \|(|\eta| + \gamma)(|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| \leq c_2 \|f(t, x), W_{2,\gamma}^{1,1}(\mathbb{R}^{n+1})\|, \quad (4.7)$$

где $c_2 > 0$ — константа, не зависящая от $f(t, x)$ и γ . Для этого вместо формы (4.5) нужно рассмотреть форму

$$\mathcal{M}_2 u = Im \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\gamma t} \mathcal{L}(x; D_t, D_x) D_t u(t, x) \overline{e^{-\gamma t} \mathcal{L}^1(x; D_t, D_x) D_t u(t, x)} d\bar{x}.$$

и провести аналогичные рассуждения из [11, 12].

Из неравенств (4.6), (4.7), леммы 4.3 и обобщенной теоремы Пэли — Винера [15] вытекает, что обобщенное решение задачи Коши $u_\gamma(t, x)$ принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^{n+1})$, существуют обобщенные производные $D_x^\beta D_t^2 u(t, x) \in L_{2,\gamma}(R_+^{n+1})$, $|\beta| = 2$, при этом $u|_{t=0} = 0$, $D_t u|_{t=0} = 0$.

Следовательно, $u(t, x)$ — сильное решение задачи Коши (2.8), и для него выполнена оценка (2.16).

Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. кн., 1998.
2. Соболев С. Л. Избранные труды. Т. I. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики; Филиал «Гео» Изд-ва СО РАН, 2003.
3. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston; Köln: VSP, 2003.
4. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
5. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М.; Л.: Стройиздат, 1940.
6. Герасимов С. И., Ерофеев В. И. Задачи волновой динамики элементов конструкций. Саратов: ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2014.
7. Гальперн С. А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными (автореферат докторской диссертации) // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 2. С. 239–249.
8. Bishop R. E. D. Longitudinal waves in beams // Aeronaut. Q. 1952. V. 3, N 4. P. 280–293.
9. Rao J. S. Advanced theory of vibration. New York: John Wiley and Sons, 1992.
10. Демиденко Г. В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.
11. Демиденко Г. В. Энергетические оценки для одного класса псевдогиперболических операторов с переменными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2024. Т. 64, № 8. С. 1466–1475.
12. Демиденко Г. В., Нурмахматов В. С. Энергетические оценки для одного равномерно строго псевдогиперболического оператора // Челяб. физ.-мат. журн. 2025. Т. 10, № 4. С. 649–663.
13. Петровский И. Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986.
14. Лере Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
15. Демиденко Г. В. Пространства Соболева и обобщенные решения. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2015.
16. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной старшей частью. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
17. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. III. М.: Мир, 1987.

Поступила в редакцию 3 марта 2026 г.

После доработки 7 апреля 2026 г.

Принята к публикации 26 мая 2026 г.

Демиденко Геннадий Владимирович, Нурмахматов Вахоббиддин Саидаслон угли
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
demidenko.gv@yandex.ru, v.s.nurmuhammad@gmail.com

SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM
FOR ONE CLASS OF STRICTLY
PSEUDOHYPERBOLIC FOURTH-ORDER EQUATIONS

G. V. Demidenko and V. S. Nurmakhmatov

Abstract: We consider the Cauchy problem for a class of strictly pseudohyperbolic fourth-order equations with variable coefficients. In particular, this class includes the Vlasov, Galpern, and Rayleigh–Bishop equations. Unique solvability of the Cauchy problem under some conditions on right-hand sides is proved in weighted Sobolev spaces.

DOI: 10.25587/2411-9326-2026-2-38-54

Keywords: equations not solvable with respect to the highest-order derivative, pseudohyperbolic equations, energy estimates, weighted Sobolev spaces.

REFERENCES

1. Demidenko G. V. and Uspenskii S. V., Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative, Marcel Dekker, New York; Basel (2003).
2. Sobolev S. L., Selected Works, vol. I. Equations of Mathematical Physics, Computational Mathematics, and Cubature Formulas, Springer, New York (2006).
3. Sviridyuk G. A. and Fedorov V. E., Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators, VSP, Utrecht; Boston; Köln (2003).
4. Sveshnikov A. G., Al'shin A. B., Korpusov M. O., and Pletner Yu. D., Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2007).
5. Vlasov V. Z. Thin-Walled Elastic Beams, National Science Foundation, Washington, DC (1961).
6. Gerasimov S. I. and Erofeev V. I., Problems of Wave Dynamics for Structural Elements [in Russian], Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Scientific Research Institute of Experimental Physics, Sarov (2014).
7. Gal'pern S. A., “The Cauchy problem for general systems of linear partial differential equations (summary of a doctor's thesis) [in Russian],” *Usp. Mat. Nauk*, **18**, No. 2, 239–249 (1963).
8. Bishop R. E. D., “Longitudinal waves in beams,” *Aeronaut. Q.*, **3**, No. 4, 280–293 (1952).
9. Rao J. S., Advanced Theory of Vibration, John Wiley and Sons, New York (1992).
10. Demidenko G. V., “Solvability conditions of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations,” *Sib. Math. J.*, **56**, No. 6, 1028–1041 (2015).
11. Demidenko G. V., “Energy estimates for one class of pseudohyperbolic operators with variable coefficients,” *Comput. Math. Math. Phys.*, **64**, No. 8, 1755–1764 (2024).
12. Demidenko G. V. and Nurmakhmatov V. S., “Energy estimates for a uniformly strictly pseudohyperbolic operator [in Russian],” *Chelyab. Phys. Math. J.*, **10**, No. 4, 649–663 (2025).
13. Petrovskiy I. G., Selected Works, Systems of Partial Differential Equations, Algebraic Geometry [in Russian], Nauka, Moscow (1986).
14. Leray J., Hyperbolic Differential Equations, Inst. Adv. Study, Princeton, MA (1953).

The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under Agreement No. 075–15–2025–349 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

15. *Demidenko G. V.*, Sobolev Spaces and Generalized Solutions [in Russian], Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk (2015).
16. *Volevich L. R. and Gindikin S. G.*, A Mixed Problem for Partial Differential Equations with Quasi-Homogeneous Higher Part [in Russian], Editorial URSS, Moscow (1999).
17. *Hörmander L.*, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, vol. III, Springer, Berlin (1985).

Submitted March 3, 2026

Revised April 7, 2026

Accepted May 26, 2026

Gennadii V. Demidenko, Vakhobiddin S. Nurmakhmatov
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, Novosibirsk 630090
`demidenko.gv@yandex.ru`, `v.s.nurmuhammad@gmail.com`