

## КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВАЖДЫ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А. И. Кожанов, О. С. Зикиров

**Аннотация.** Работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений вида

$$\varphi(t)u_t + (-1)^m \psi(t) D_x^{2m+1} u + c(x, t)u = f(x, t)$$

( $D_x^k = \frac{\partial^k}{\partial x^k}$ ,  $m \geq 1$  целое,  $x \in (0, 1)$ ,  $t \in (0, T)$ ,  $0 < T < +\infty$ ), называемых уравнениями с кратными характеристиками. В этих уравнениях функция  $\varphi(t)$  может менять знак на отрезке  $[0, T]$  произвольным образом, функция  $\psi(t)$  предполагается неотрицательной. Для изучаемых уравнений предлагаются постановки краевых задач, существенным образом определяющиеся числами  $\varphi(0)$  и  $\varphi(T)$ , и для предложенных задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.100.20552

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения нечетного порядка, вырождение, смена направления эволюции, краевые задачи, регулярные решения, существование, единственность.

### Введение

Пусть  $\Omega$  — интервал  $(0, 1)$  оси  $Ox$ ,  $Q$  — прямоугольник  $\{(x, t) : x \in \Omega, 0 < t < T\}$  ( $T < +\infty$ ),  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $c(x, t)$  и  $f(x, t)$  — заданные функции, определенные при  $x \in \overline{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $m$  — целое неотрицательное число. Для заданной функции  $v(x, t)$  через  $D_x^k v(x, t)$  будем обозначать частную производную  $\frac{\partial^k v(x, t)}{\partial x^k}$  ( $k$  — целое неотрицательное число).

Целью работы является исследование разрешимости в классах регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений краевых задач для уравнений

$$\varphi(t)u_t + (-1)^m \psi(t) D_x^{2m+1} u + c(x, t)u = f(x, t), \quad (*)$$

в которых функция  $\varphi(t)$  может менять знак на отрезке  $[0, T]$  произвольным образом, функция  $\psi(t)$  неотрицательна на отрезке  $[0, T]$ , при этом как функция

---

Работа А. И. Кожанова поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 18-51-41009), работа О. С. Зикирова выполнена в рамках совместного узбекско-российского научно-исследовательского проекта MRU-0T-1/2017.

$\varphi(t)$ , так и функция  $\psi(t)$  могут обращаться в нуль на подмножествах отрезка  $[0, T]$  положительной меры.

Уравнения (\*) в случае  $\varphi(t) \equiv 1$ ,  $\psi(t) \equiv 1$ ,  $m = 0$ , с одной стороны, представляют собой уравнения, называемые в литературе *уравнениями с кратными характеристиками* [1]; различные краевые задачи для таких уравнений хорошо изучены [1–6]. С другой стороны, эти же уравнения можно считать линеаризованными уравнениями Кортвега — де Фриза [7]; различные краевые задачи для уравнений Кортвега — де Фриза изучались в работах [8–14]. В случае  $\varphi(t) \equiv 1$ ,  $\psi(t) \equiv 1$ ,  $m > 0$  краевые задачи для уравнений (\*) изучались в работе [15], в случае  $\psi(t) \equiv 1$ ,  $m = 1$  — в работе [16]. Наконец, общий случай уравнений (\*) с функцией  $\varphi(t)$  произвольного знака и с неотрицательной произвольным образом обращающейся в нуль на отрезке  $[0, T]$  функцией  $\psi(t)$  ранее не изучался.

### 1. Постановка задач

Обозначим через  $L$  дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции  $v(x, t)$  определяется равенством

$$Lv = \varphi(t)v_t + (-1)^m \psi(t) D_x^{2m+1} v + c(x, t)v.$$

**Краевая задача I.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$Lu = f(x, t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$D_x^k u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad k = 0, \dots, m, \quad t \in (0, T), \tag{2}$$

$$D_x^k u(x, t)|_{x=1} = 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad t \in (0, T). \tag{3}$$

**Краевая задача II.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), а также условия

$$D_x^k u(x, t)|_{x=1} = 0, \quad k = m+1, \dots, 2m, \quad t \in (0, T). \tag{4}$$

**Краевая задача III.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

**Краевая задача IV.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (4) и (5).

**Краевая задача V.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{6}$$

**Краевая задача VI.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (4) и (6).

**Краевая задача VII.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), (5) и (6).

**Краевая задача VIII.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (4), (5) и (6).

Обозначим для краткости через  $V_1$  анизотропное соболевское пространство  $W_{2,x,t}^{2m+1,1}(Q)$ . Именно в этом пространстве и будет установлена разрешимость краевых задач I–VIII.

## 2. Разрешимость краевых задач I и II

Доказательство разрешимости краевых задач I и II будет проведено с помощью метода регуляризации и метода продолжения по параметру.

Обозначим через  $V_2$  множество функций  $v(x, t)$ , принадлежащих пространству  $L_2(Q)$  и таких, что их обобщенные производные

$D_x^k v(x, t)$ ,  $k = 1, \dots, 2(2m+1)$ ,  $v_t(x, t)$ ,  $D_x^k v_t(x, t)$ ,  $k = 1, \dots, 2m+1$ ,  $v_{tt}(x, t)$  существуют и также принадлежат  $L_2(Q)$ . Очевидно, что множество  $V_2$  есть линейное пространство. Зададим в  $V_2$  норму:

$$\|v\|_{V_2} = \left\{ \int_Q (v^2 + (D_x^{2(2m+1)} v)^2 + v_t^2 + (D_x^{2m+1} v_t)^2 + v_{tt}^2) dx dt \right\}^{1/2}.$$

Также очевидно, что множество  $V_2$  с этой нормой будет банаховым пространством.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия

$$\varphi(t) \in C^1([0, T]), \quad \psi(t) \in C^1([0, T]), \quad c(x, t) \in C^1(\overline{Q}),$$

$$D_x^k c(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad k = 2, \dots, 2m+1; \tag{7}$$

$$\varphi(0) \leq 0, \quad \varphi(T) \geq 0; \tag{8}$$

$$\psi(t) \geq 0, \quad 2c(x, t) - \varphi'(t) \geq c_1 > 0,$$

$$2c(x, t) + \varphi'(t) \geq c_2 > 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{9}$$

Тогда для любой функции  $f(x, t)$ , принадлежащей пространству  $V_1$  и такой, что для нее выполняются условия (2) и (3), краевая задача I имеет решение  $u(x, t)$ , также принадлежащее пространству  $V_1$ , и притом ровно одно.

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon$  — положительное число. Обозначим через  $L_2$  дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции  $v(x, t)$  определяется равенством

$$L_\varepsilon v = -\varepsilon v_{tt} - \varepsilon D_x^{2(2m+1)} v + Lv.$$

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$L_\varepsilon u = f(x, t) \quad (10)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условия

$$D_x^k u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad k = 2m+1, \dots, 3m, \quad t \in (0, T), \quad (11)$$

$$D_x^k u(x, t)|_{x=1} = 0, \quad k = 2m+1, \dots, 3m+1, \quad t \in (0, T), \quad (12)$$

$$u_t(x, 0) = u_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (13)$$

Разрешимость краевой задачи (10), (2), (3), (11)–(13) при фиксированном  $\varepsilon$  будет установлена с помощью метода продолжения по параметру, разрешимость исходной краевой задачи I — с помощью выбора из семейства  $\{u^\varepsilon(x, t)\}_{\varepsilon>0}$  решений задачи (10), (2), (3), (11)–(13) слабо сходящейся в пространстве  $V_2$  последовательности и соответствующем предельном переходе. Поскольку и для применения теоремы о методе продолжения по параметру, и для выбора нужной последовательности необходимы априорные оценки, установим вначале их наличие.

Рассмотрим равенство

$$\int_Q L_\varepsilon u u \, dx dt = \int_Q f u \, dx dt. \quad (14)$$

Интегрируя по частям и используя условия теоремы, нетрудно получить первую априорную оценку для решений  $u(x, t)$  краевой задачи (10), (2), (3), (11)–(13), принадлежащей пространству  $V_2$ :

$$\varepsilon \int_Q [u_t^2 + (D_x^{2m+1} u)^2] \, dx dt + \int_Q u^2 \, dx dt + \int_0^T \psi(t) [D_x^m u(0, t)]^2 \, dx \leq N_0 \int_Q f^2 \, dx dt, \quad (15)$$

постоянная  $N_0$  в которой определяется лишь числом  $c_1$ .

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$-\int_Q L_\varepsilon u D_x^{2(2m+1)} u \, dx dt = -\int_Q f D_x^{2(2m+1)} u \, dx dt.$$

Его нетрудно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_Q (D_x^{2m+1} u_t)^2 \, dx dt + \varepsilon \int_Q (D_x^{2(2m+1)} u)^2 \, dx dt \\ & + \int_Q \left( c - \frac{1}{2} \varphi' \right) (D_x^{2m+1} u)^2 \, dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \psi(t) [D_x^{3m+1} u(0, t)]^2 \, dt \\ & - \frac{\varphi(0)}{2} \int_\Omega [D_x^{2m+1} u(x, 0)]^2 \, dx + \frac{\varphi(T)}{2} \int_\Omega [D_x^{2m+1} u(x, T)]^2 \, dx \end{aligned}$$

$$= - \int_Q f D_x^{2(2m+1)} u \, dx dt - \sum_{k=0} C_{2m+1}^k \int_Q D_x^k u D_x^{2m+1-k} c(x, t) D_x^{2m+1} u \, dx dt \quad (16)$$

( $C_{2m+1}^k$  — биномиальные коэффициенты). Применяя в правой части (16) неравенство Юнга, используя также интерполяционные неравенства [17]

$$\int_Q (D_x^k u)^2 \, dx dt \leq \delta \int_Q (D_x^{2m+1} u)^2 \, dx dt + M(\delta) \int_Q u^2 \, dx dt$$

( $k = 0, \dots, 2m$ ,  $\delta$  — произвольное положительное число), используя условия теоремы и, наконец, используя оценку (15), получим, что для решений  $u(x, t)$  краевой задачи (10), (2), (3), (11)–(13) из пространства  $V_2$  имеет место оценка

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_Q (D_x^{2m+1} u_t)^2 \, dx dt + \varepsilon \int_Q (D_x^{2(2m+1)} u)^2 \, dx dt \\ + \int_Q (D_x^{2m+1} u)^2 \, dx dt \leq N_1 \int_Q f^2 \, dx dt, \end{aligned} \quad (17)$$

где постоянная  $N_1$  определяется функциями  $c(x, t)$  и  $\varphi(t)$ , а также числом  $\varepsilon$ .

Следующее равенство:

$$- \int_Q L_\varepsilon u u_{tt} \, dx dt = - \int_Q f u_{tt} \, dx dt, \quad (18)$$

неравенство Юнга и оценки (15) и (17) дают для решений  $u(x, t)$  краевой задачи (10), (2), (3), (11)–(13) из пространства  $V_2$  еще одну априорную оценку

$$\varepsilon \int_Q u_{tt}^2 \, dx dt \leq N_2 \int_Q f^2 \, dx dt, \quad (19)$$

постоянная  $N_2$  в которой определяется функциями  $c(x, t)$ ,  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$ , а также числом  $\varepsilon$ .

Оценок (15), (17) и (18) вполне достаточно для доказательства разрешимости при фиксированном  $\varepsilon$  в пространстве  $V_2$  краевой задачи (10), (2), (3), (11)–(13). Действительно, пусть  $\lambda$  — число из отрезка  $[0, 1]$ . Рассмотрим краевую задачу: найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$-\varepsilon u_{tt} - \varepsilon D_x^{2(2m+1)} u + \lambda L u = f(x, t) \quad (10_\lambda)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), (11)–(13). Наличие априорных оценок (15), (17) и (18), очевидная разрешимость в пространстве  $V_2$  краевой задачи (10), (2), (3), (11)–(13), а также теорема о методе продолжения по параметру [18, гл. III, § 14] означают, что краевая задача  $(10_\lambda)$ , (2), (3), (11)–(13) разрешима в пространстве  $V_2$  при фиксированном  $\varepsilon$  и при принадлежности функции  $f(x, t)$  пространству  $L_2(Q)$  для любого числа  $\lambda$  из отрезка  $[0, 1]$ , а значит, и для числа  $\lambda = 1$ . Это и дает искомую разрешимость в пространстве  $V_2$  краевой задачи (10), (2), (3), (11)–(13).

Покажем, что при выполнении дополнительных условий на функцию  $f(x, t)$  (условий, указанных в формулировке теоремы) для решений  $u(x, t)$  краевой за-

дачи (10), (2), (3), (11)–(13) из пространства  $V_2$  будут выполняться оценки, равномерные по  $\varepsilon$ .

Прежде всего заметим, что для решений  $u(x, t)$  краевой задачи (10), (2), (3), (11)–(13) из пространства  $V_2$  и для функции  $f(x, t)$  при выполнении условий теоремы имеет место равенство

$$\int_Q f D_x^{2(2m+1)} u \, dx dt = - \int_Q D_x^{2m+1} f D_x^{2m+1} u \, dx dt.$$

Учитывая это равенство, применяя далее неравенство Юнга, используя неравенства из [17], условия теоремы и равномерную по  $\varepsilon$  оценку (15), нетрудно получить априорную оценку

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_Q (D_x^{2m+1} u_t)^2 \, dx dt + \varepsilon \int_Q (D_x^{2(2m+1)} u)^2 \, dx dt \\ + \int_Q (D_x^{2m+1} u)^2 \, dx dt \leq N_3 \int_Q [f^2 + (D_x^{2m+1} f)^2] \, dx dt, \end{aligned} \quad (20)$$

постоянная  $N_3$  в которой определяется лишь числом  $c_1$  и функцией  $c(x, t)$ .

Вновь рассмотрим равенство (18). Его нетрудно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_Q u_{tt}^2 \, dx dt + \int_Q \left( c + \frac{1}{2} \varphi' \right) u_t^2 \, dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \psi(t) [D_x^m u_t(0, t)]^2 \, dt \\ = -\varepsilon \int_Q D_x^{2(2m+1)} u u_{tt} \, dx dt - (-1)^m \int_Q \psi' D_x^{2m+1} u u_t \, dx dt \\ - \int_Q c_t u u_t \, dx dt + \int_Q f_t u_t \, dx dt. \end{aligned} \quad (21)$$

Условия теоремы, неравенство Юнга, оценки (15) и (20) дают следствие равенства (21) — априорную оценку:

$$\varepsilon \int_Q u_{tt}^2 \, dx dt + \int_Q u_t^2 \, dx dt \leq N_4 \int_Q [f^2 + (D_x^{2m+1} f)^2] \, dx dt \quad (22)$$

с постоянной  $N_4$ , определяющейся числом  $c_2$ , функциями  $c(x, t)$  и  $\psi(t)$ .

Оценок (15), (20) и (22) достаточно для осуществления процедуры предельного перехода и получения в пределе требуемого решения краевой задачи I.

Пусть  $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^\infty$  — последовательность положительных чисел, сходящаяся к 0. Обозначим через  $u_l(x, t)$  решение краевой задачи (10), (2), (3), (11)–(13) в случае  $\varepsilon = \varepsilon_l$ . Для последовательности  $\{u_l(x, t)\}_{l=1}^\infty$  имеют место априорные оценки (15), (20) и (22), взятые при  $\varepsilon = \varepsilon_l$ . Из этих оценок и свойства рефлексивности гильбертова пространства следует, что существуют подпоследовательность  $\{u_{l_k}(x, t)\}_{k=1}^\infty$  и функция  $u(x, t)$  такие, что при  $k \rightarrow \infty$  имеют место сходимости

$$\varepsilon_{l_k} \rightarrow 0,$$

$$u_{l_k}(x, t) \rightarrow u(x, t) \quad \text{слабо в пространстве } L_2(Q),$$

$$\begin{aligned}
u_{l_k t}(x, t) &\rightarrow u_t(x, t) \quad \text{слабо в пространстве } L_2(Q), \\
D_x^{2m+1} u_{l_k}(x, t) &\rightarrow D_x^{2m+1} u(x, t) \quad \text{слабо в пространстве } L_2(Q), \\
\varepsilon_{l_k} u_{l_k t t}(x, t) &\rightarrow 0 \quad \text{слабо в пространстве } L_2(Q), \\
\varepsilon_{l_k} D_x^{2(2m+1)} u_{l_k}(x, t) &\rightarrow 0 \quad \text{слабо в пространстве } L_2(Q).
\end{aligned}$$

Предельная функция  $u(x, t)$  и будет представлять собой требуемое решение краевой задачи I.

Для доказательства единственности решения краевой задачи I достаточно в равенстве

$$\int_Q L u u \, dx dt = 0$$

выполнить интегрирование по частям. Вследствие условий теоремы получим неравенство

$$\int_Q u^2 \, dx dt \leq 0,$$

из которого и следует, что краевая задача I в случае  $f(x, t) \equiv 0$  может иметь только тождественно нулевое решение.

Теорема полностью доказана.

Исследование разрешимости краевой задачи II проводится вполне аналогично исследованию разрешимости краевой задачи I. Вновь используются метод регуляризации и метод продолжения по параметру, при этом в качестве оператора регуляризации вновь используется оператор  $L_\varepsilon$ , при  $t = 0$  и  $t = T$  в регуляризующей задаче вновь задаются условия (13). Отличие состоит лишь в том, что для регуляризующей задачи задаются иные краевые условия при  $x = 0$  и  $x = 1$  — именно, условия (2) и (4), а также условия

$$D_x^k u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad k = 2m + 1, \dots, 3m, \quad t \in (0, T), \quad (23)$$

$$D_x^k u(x, t)|_{x=1} = 0, \quad k = 3m + 1, \dots, 4m + 1, \quad t \in (0, T). \quad (24)$$

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (7)–(9). Тогда для любой функции  $f(x, t)$ , принадлежащей пространству  $V_1$  и такой, что для нее выполняются условия (2) и (4), краевая задача II имеет решение  $u(x, t)$ , также принадлежащее пространству  $V_1$ , и притом ровно одно.

### 3. Разрешимость краевых задач III–VIII

Теоремы существования и единственности решений краевых задач III–VIII доказываются аналогично доказательству теорем 1 и 2. Именно, используются методы регуляризации и продолжения по параметру, рассматривается уравнение (10), краевыми условиями для этого уравнения будут условия (2), (3), (11) и (12) для задач III, V и VII, условия (2), (4), (23) и (24) для задач IV, VI и VIII. Принципиальное отличие будет лишь в условиях при  $t = 0$  и  $t = T$  — вместо условий (13) в регуляризующих по отношению к задачам III и IV задачах дополнительно к условию (5) нужно задавать условие  $u_t(x, T) = 0$ ,  $x \in \Omega$ ,

в регуляризующих по отношению к задачам V и VI задачах дополнительно к условию (6) — условие  $u_t(x, 0) = 0$ ,  $x \in \Omega$ ; в регуляризующих по отношению к задачам VII и VIII задачах дополнительно к условиям (5) и (6) задавать что-либо не надо.

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия (7) и (8), а также условия

$$\varphi(0) > 0, \quad \varphi(T) \geq 0. \quad (25)$$

Тогда для любой функции  $f(x, t)$ , принадлежащей пространству  $V_1$  и такой, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$f(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (26)$$

краевая задача III имеет решение  $u(x, t)$ , также принадлежащее пространству  $V_1$ , и притом ровно одно.

**Теорема 4.** Пусть выполняются условия (7), (8) и (25). Тогда для любой функции  $f(x, t)$ , принадлежащей пространству  $V_1$  и такой, что для нее выполняются условия (2), (4) и (26), краевая задача IV имеет решение  $u(x, t)$ , также принадлежащее пространству  $V_1$ , и притом ровно одно.

**Теорема 5.** Пусть выполняются условия (7) и (8), а также условия

$$\varphi(0) \leq 0, \quad \varphi(T) < 0. \quad (27)$$

Тогда для любой функции  $f(x, t)$ , принадлежащей пространству  $V_1$  и такой, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$f(x, T) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (28)$$

краевая задача V имеет решение  $u(x, t)$ , также принадлежащее пространству  $V_1$ , и притом ровно одно.

**Теорема 6.** Пусть выполняются условия (7), (8) и (27). Тогда для любой функции  $f(x, t)$ , принадлежащей пространству  $V_1$  и такой, что для нее выполняются условия (2), (4) и (28), краевая задача VI имеет решение, также принадлежащее пространству  $V_1$ , и притом ровно одно.

**Теорема 7.** Пусть выполняются условия (7) и (8), а также условия

$$\varphi(0) > 0, \quad \varphi(T) < 0. \quad (29)$$

Тогда для любой функции  $f(x, t)$ , принадлежащей пространству  $V_1$  и такой, что для нее выполняются условия (2), (3), (26) и (28), краевая задача VII имеет решение  $u(x, t)$ , также принадлежащее пространству  $V_1$ , и притом ровно одно.

**Теорема 8.** Пусть выполняются условия (7), (8) и (29). Тогда для любой функции  $f(x, t)$ , принадлежащей пространству  $V_1$  и такой, что для нее выполняются условия (2), (4), (26) и (28), краевая задача VIII имеет решение  $u(x, t)$ , также принадлежащее пространству  $V_1$ , и притом ровно одно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Джурев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1986.



2. Абдиназаров С. Общие краевые условия для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 1. С. 1–12.
3. Кожанов А. И. О разрешимости нелокальной по времени задачи для одного уравнения с кратными характеристиками // Мат. заметки ЯГУ. 2001. Т. 8, вып. 2. С. 27–40.
4. Кожанов А. И. Обратные задачи для уравнений с кратными характеристиками: случай неизвестного коэффициента, зависящего от времени // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. Академии Наук. 2005. Т. 8, № 1. С. 38–49.
5. Балкизов Ж. А., Кодзоков А. Х. О представлении решений краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Изв. Кабардино-Балкарск. науч. центра РАН. 2010. № 4. С. 64–69.
6. Хашимов А. Р., Тургинов А. М. О некоторых нелокальных задачах для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 1. С. 69–74.
7. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые явления. М.: Мир, 1988.
8. Бубнов Б. А. Общие краевые задачи для уравнения Кортевега — де Фриза в ограниченной области // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 26–31.
9. Хаблов В. В. О некоторых корректных постановках граничных задач для уравнения Кортевега — де Фриза. Препринт. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР. 1979.
10. Kenig C. E., Ponce G., Vega L. Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg–de Vries equation // J. Amer. Math. Soc. 1991. № 4. P. 323–347.
11. Larkin N. A. Korteweg–de Vries and Kuramoto–Sivashinsky equations in bounded domains // J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 297. P. 169–185.
12. Doronin G. G., Larkin N. A. KDV equation in domain with moving boundaries // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 328. P. 503–515.
13. Larkin N. A., Luchesi J. General mixed problems for the KDV equations on bounded intervals // Electron. J. Differ. Equ. 2010. V. 2010, N 168. P. 1–17.
14. Лукина Г. А. Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега — де Фриза // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2011. Вып. 8, № 17. С. 53–62.
15. Faminskii A. V., Larkin N. A. Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed in a bounded interval // Electron. J. Differ. Equ. 2010. V. 2010, N 1. P. 1–20.
16. Кожанов А. И., Лукина Г. А. Нелокальные краевые задачи с частично интегральными условиями для дважды вырождающихся дифференциальных уравнений с кратными характеристиками // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2017. Т. 17, № 3. С. 37–52.
17. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
18. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

*Поступила в редакцию 1 октября 2018 г.*

*После доработки 3 ноября 2018 г.*

*Принята к публикации 13 ноября 2018 г.*

Кожанов Александр Иванович  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
kozhanov@math.nsc.ru

Зикиров Обиджон Салижанович  
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,  
кафедра дифференциальных уравнений и математической физики,  
ул. Университетская, 4, Вузгородок, Ташкент 100174  
zikirov@yandex.com

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR TWICE  
DEGENERATE DIFFERENTIAL EQUATIONS  
WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS  
A. I. Kozhanov and O. S. Zikirov

**Abstract:** We study the solvability of boundary value problems for degenerate differential equations of the form

$$\varphi(t)u_t + (-1)^m \psi(t) D_x^{2m+1} u + c(x, t)u = f(x, t)$$

( $D_x^k = \frac{\partial^k}{\partial x^k}$ ,  $m \geq 1$  is an integer,  $x \in (0, 1)$ ,  $t \in (0, T)$ ,  $0 < T < +\infty$ ) called equations with multiple characteristics. In these equations, the function  $\varphi(t)$  can change the sign on the interval  $[0, T]$  arbitrarily, while the function  $\psi(t)$  is assumed nonnegative. For the equations under consideration, we propose the formulation of boundary value problems which are essentially determined by numbers  $\varphi(0)$  and  $\varphi(T)$ . Existence and uniqueness theorems are proved for the regular solutions that have all Sobolev generalized derivatives entering into the equation.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.100.20552

**Keywords:** differential equations of odd order, degeneracy, change of direction of evolution, boundary value problems, regular solutions, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Dzhuraev T. D., Boundary Value Problems for Mixed and Mixed-Composite Type Equations [in Russian], Fan, Tashkent (1986).
2. Abdinazarov S., "General boundary conditions for third-order equations with multiple characteristics [in Russian]," Differents. Uravn., **17**, No. 1, 1–12 (1981).
3. Kozhanov A. I., "On solvability of a time-nonlocal problem for an equation with multiple characteristics [in Russian]," Mat. Zamet. YAGU, **8**, No. 2, 27–40 (2001).
4. Kozhanov A. I., "Inverse problems for equations with multiple characteristics in case of unknown coefficient dependent on time [in Russian]," Dokl. Adygsk. (Cherkess.) Mezhdunar. Akad. Nauk, **8**, No. 1, 38–49 (2005).
5. Balkizov Zh. A. and Kodzokov A. Kh., "On representation of solutions to the boundary problem for nonhomogeneous third-order equations with multiple characteristics [in Russian]," Izv. Kabard.-Balkarsk. Nauch. Tsentra RAN, No. 4, 64–69 (2010).
6. Khashimov A. R. and Turginov A. M., "On some nonlocal problems for third order equations with multiple characteristics [in Russian]," Math. Zamet. SVFU, **21**, No. 1, 63–68 (2014).
7. Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., and Morris H. C., Solitons and Nonlinear Wave Equations, Acad. Press, London (1982).
8. Bubnov B. A., "Generalized boundary value problems for the Korteweg–de Vries equation in bounded domain," Differ. Equ., **15**, No. 1, 17–21 (1979).
9. Khablov V. V., "On some well-posed boundary value problems for the Korteweg–de Vries equation [in Russian]," preprint, Sobolev Inst. Mat., Novosibirsk (1979).

10. Kenig C. E., Ponce G., and Vega L., "Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg–de Vries equation," J. Amer. Math. Soc., No. 4, 323–347 (1991).
11. Larkin N. A., "Korteweg–de Vries and Kuramoto–Sivashinsky equations in bounded domains," J. Math. Anal. Appl., **297**, 169–185 (2004).
12. Doronin G. G. and Larkin N. A., "KDV equation in domain with moving boundaries," J. Math. Anal. Appl. 2007, **328**, 503–515.
13. Larkin N. A. and Luchesi J., "General mixed problems for the KDV equations on bounded intervals," Electron. J. Differ. Equ., No. 168, 1–17 (2010).
14. Lukina G. A., "Boundary problems with integral boundary conditions for the linearized Korteweg–de Vries equation [in Russian]," Vestn. Yuzh.-Ural. Gos. Univ., **8**, No. 17, 53–62 (2011).
15. Faminskii A. V. and Larkin N. A., "Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed in a bounded interval," Electron. J. Differ. Equ., **2010**, No. 1, 1–20 (2010).
16. Kozhanov A. I. and Lukina G. A., "Nonlocal boundary value problems with partially integral conditions for degenerate differential equations with multiple characteristics," J. Math. Sci., **237**, No. 14, 549–562 (2019).
17. Besov O. V., Ilin V. P., and Nikolskii S. M., Integral Representations of Functions and Embedding Theorems, John Wiley and Sons, New York (1978).
18. Trenogin V. A., Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).

*Submitted October 1, 2018*

*Revised November 3, 2018*

*Accepted November 13, 2018*

Alexander I. Kozhanov  
Sobolev Institute of Mathematics,  
4 Acad. Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia  
kozhanov@math.nsc.ru

Obidjon S. Zikirov  
Faculty of Mechanics and Mathematics, National University of Uzbekistan,  
4 University Street, Vuzgorodok, Tashkent 100174, Uzbekistan  
zikirov@yandex.com