

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

С. З. Джамалов, С. Г. Пятков

Аннотация. Рассматривается вопрос о корректности в пространствах Соболева обратной задачи определения функции источника для уравнения смешанного типа второго порядка. В качестве условий переопределения рассматриваются значения решения на некотором наборе плоскостей размерности $n-1$. Незвестные функции, входящие в правую часть, зависят от времени и $n-1$ пространственных переменных и ищутся в классе квадратично суммируемых функций. При определенных естественных условиях на данные получены теоремы существования и единственности обобщенных решений задачи. Условия на данные по существу совпадают с условиями разрешимости прямой задачи. В качестве метода используется метод продолжения по параметру и полученные априорные оценки. Метод исследования позволяет обобщить результаты на случай более гладких данных и регулярных решений.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.100.20550

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, обратная задача, функция источника, газовая динамика.

1. Введение

В статье рассматривается вопрос об определении вместе с решением правой части специального вида в уравнении смешанного типа второго порядка. Пусть G – область в $\mathbb{R}^{n+1}$ с границей Γ , $Q = G \times (0, T)$, $S = \Gamma \times (0, T)$. Уравнение имеет вид

$$Lu = k(x, t)u_{tt} + Au = f, \quad (1)$$

где $(t, x, y) \in Q$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, A – эллиптический оператор вида

$$A(t, x, D)u = - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j} a_{ij}(x) u_{x_i} - a_0(x) L_y u + a(x, t) u_t + c_0(x) u, \\ L_y u = \partial_y \alpha(y) u_y - \beta(y) u.$$

Правая часть имеет вид

$$f = f_0(x, y, t) + \sum_{i=1}^m f_i(x, y, t) q_i(x, t),$$

Работа Джамалова С. З. выполнена в рамках совместного узбекско-российского научно-исследовательского проекта MRU-0T-1/2017. Работа Пяткова С. Г. выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-51-41009).

где $\vec{q}(x, t) = (q_1(x, t), q_2(x, t), \dots, q_m(x, t))$ — неизвестные функции, подлежащие определению вместе с решением u . Функция k в (1), вообще говоря, меняет знак в области Q . Определим множества

$$P_0^+ = \{(x, 0) : k(x, 0) > 0\}, \quad P_T^- = \{(x, T) : k(x, T) < 0\},$$

$$\tilde{P}_0^+ = P_0^+ \times (0, l), \quad \tilde{P}_T^- = P_T^- \times (0, l).$$

Уравнение (1) дополняется граничными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_S = 0, \quad u_t|_{\tilde{P}_0^+} = 0, \quad u_t|_{\tilde{P}_T^-} = 0. \quad (2)$$

Условия переопределения записываются в виде

$$u(x, y_i, t) = \psi_i(x, t), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Обратная задача состоит в нахождении решения u уравнения (1) и функций $q_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$, по данным (2), (3).

Первые фундаментальные результаты по теории уравнений смешанного типа появились в работах Трикоми и Геллерстедта в 20-х годах прошлого столетия. Благодаря исследованиям Ф. И. Франкля, И. Н. Векуа, М. А. Лаврентьева, А. Н. Бицадзе, Проттера, Моравец и многих других авторов, теория уравнений смешанного типа стала неотъемлемой частью современной теории уравнений в частных производных (см. [1, 2]). Основные приложения таких уравнений — газовая динамика и гидродинамика. В отличие от прямых задач, обратные задачи для таких уравнений практически не исследовались. Задачи с вышеприведенными условиями переопределения часто возникают при рассмотрении волновых процессов для гиперболических уравнений второго порядка. В частности, коэффициентные одномерные по пространственной переменной задачи с данными переопределения такого вида можно найти в [3, гл. 10], а задачи об определении правой части в такой же постановке, как у нас, рассмотрены в [4, § 2.3] также в одномерном случае. Параболические обратные задачи в такой постановке исследуются в монографии [5] (см. также работу [6]). Некоторые модельные обратные задачи для уравнения смешанного типа в случае одной пространственной переменной рассмотрены в [7, 8]. Другие постановки обратных задач имеются в работах К. Б. Сабитова, С. Н. Сидорова и ряда других авторов (см. библиографию в [9–12]).

В данной работе получена теорема о существовании и единственности решения задачи (1)–(3), описаны условия на коэффициенты, гарантирующие ее разрешимость, и проведен некоторый анализ этих условий. В разд. 2 приведены определения и обозначения и доказаны вспомогательные результаты. Разд. 3 посвящен основным результатам.

2. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Пусть E — банахово пространство. Символом $L_p(G; E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) обозначаем пространство сильно измеримых функций, определенных на G ,

со значениями в E , наделенное нормой $\|u(x)\|_E \|_{L_p(G)}$ [14]. Также используем пространства Соболева $W_p^s(G; E)$, $W_p^s(Q; E)$ и пространства Гёльдера $C^\alpha(\overline{G}; E)$ (см. определения в [14, 15]). Если $E = \mathbb{C}$ ($E = \mathbb{R}$), то используем обозначения $W_p^s(Q)$ или $C^\alpha(\overline{G})$ соответственно. Под $W_2^{-s}(G)$ при $s > 0$, как обычно, понимаем двойственное (негативное) пространство к $\overset{\circ}{W}_2^s(G)$ (см. определения в [14]).

Будем предполагать, что $G = \Omega \times (0, l)$, где Ω — ограниченная область с границей класса C^1 в $\mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$, $y \in (0, l)$. Положим $Q_0 = \Omega \times (0, T)$, $S_0 = \partial\Omega \times (0, T)$,

$$L_0 u = k(x, t) u_{tt} + A_0 u, \quad A_0 u = - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j} a_{ij}(x) u_{x_i} + a(t, x) u_t + c_0(x) u.$$

Все коэффициенты и функциональные пространства, используемые ниже, предполагаются вещественными.

Условия на коэффициенты:

$$a_{ij} \in C^1(\overline{Q}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k_t, k, a \in C(\overline{Q_0}), \quad c_0 \in C(\overline{Q}); \quad (4)$$

существуют постоянные $\delta_0, \delta_1, M_0, M_1 > 0$ такие, что

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \delta_0 > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \Omega; \quad c_0 \geq 0 \quad \forall x \in \Omega; \quad (5)$$

$$a - \frac{k_t}{2} \geq \delta_1 > 0, \quad a - \frac{3k_t}{2} \geq \delta_1 > 0 \quad \forall (x, t) \in Q_0; \quad (6)$$

$$a_0(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad a_0(x) \geq M_0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \alpha \in C^2([0, l]), \quad (7)$$

$$\beta \in C([0, l]), \quad \alpha(y) \geq M_1, \quad \beta(y) \geq 0 \quad \forall y \in (0, l).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условия на коэффициенты могут быть значительно ослаблены как в смысле гладкости, так и в смысле зависимости от независимых переменных. Однако здесь мы используем результаты работы [2], в которой используются именно эти условия, поэтому они записаны в таком виде.

Приведем теорему о разрешимости прямой задачи, вытекающую из результатов в [2, теоремы 1.1–1.3]. Далее используем обозначение

$$\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}).$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$L_0 u(x, t) = f(x, t). \quad (8)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{S_0} = 0, \quad u_t|_{P_0^+} = 0, \quad u_t|_{P_T^-} = 0. \quad (9)$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (4)–(6), $f \in L_2(Q_0)$ и выполнено одно из условий

$$k(x, 0) \geq 0 \text{ и } k(x, T) < 0, \quad k(x, 0) < 0 \text{ и } k(x, T) \geq 0,$$

$$k(x, 0) < 0 \text{ и } k(x, T) < 0, \quad k(x, 0) \geq 0 \text{ и } k(x, T) \geq 0$$

для всех $x \in \Omega$. Тогда существует обобщенное решение задачи (8), (9) такое, что $u \in W_2^1(Q_0)$, $\partial_t k u_t \in L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$. Решение удовлетворяет оценке

$$\int_{Q_0} \left[\frac{\lambda}{2} (\delta_0 |\nabla u|^2 + c_0 |u|^2) + \left(c - \frac{1}{2} k_t + \frac{1}{2} \lambda k \right) |u_t|^2 \right] e^{-\lambda t} dx dt \leq \frac{2}{\delta_1} \|e^{-\frac{\lambda t}{2}} f\|_{L_2(Q_0)}^2, \quad (10)$$

где параметр $\lambda > 0$ выбран таким образом, что

$$a - \frac{k_t}{2} + \frac{\lambda k}{2} \geq \frac{\delta_1}{2}, \quad a - \frac{3k_t}{2} - \frac{3\lambda k}{2} \geq \frac{\delta_1}{2} \quad \forall (x, t) \in Q_0.$$

Найдется число $\gamma_0 > 0$ такое, что при выполнении неравенства $c_0(x) \geq \gamma_0$ для всех x обобщенное решение единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема существования обобщенного решения следует из теоремы 1.1 в [2]. Полученное решение удовлетворяет уравнению (8) в смысле интегрального тождества. Однако непосредственно из него и определения обобщенной производной вытекают включение $\partial_t k u_t \in L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$ и выполнение краевых условий для функции u_t при $t = 0$ и $t = T$. Оценка (10) не приведена в явном виде в формулировке соответствующей теоремы 1.1, но она используется в доказательстве этой теоремы при применении теоремы Хана — Банаха. Поскольку норма соответствующего функционала при продолжении не увеличивается, можно показать, что оценка остается справедливой и для полученного решения. Параметр γ_0 выбирается в [2] при доказательстве теоремы единственности (теоремы 1.2, 1.3), и он зависит от норм коэффициентов уравнения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если обратиться к доказательству теоремы 1.1 в [2], то можно легко увидеть в силу условий на знакоопределенность функции k на верхнем и нижнем основаниях цилиндра, что краевые условия при $t = 0$ и $t = T$ сводятся к условиям: $u|_{t=0} = 0$, $k u_t|_{t=0} = 0$, если $k(x, 0) \geq 0$ для всех x , и $k u_t|_{t=T} = 0$, если $k(x, T) \leq 0$ для всех x . При этом следы $k u_t|_{t=0}$, $k u_t|_{t=T}$ понимаются в смысле пространства $W_2^{-1}(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В силу условия (6) выбор параметра λ со свойством, указанным в формулировке теоремы, всегда возможен, например, его можно выбрать достаточно малым положительным числом.

Следующий результат — теорема о разрешимости прямой задачи (1), (2).

Теорема 2. Пусть выполнены условия (4)–(7),

$$f \in L_2(Q_0; W_2^2(0, l)), \quad f(x, 0, t) = 0, \quad f(x, l, t) = 0$$

и выполнено одно из условий

$$k(x, 0) \geq 0 \text{ и } k(x, T) < 0, \quad k(x, 0) < 0 \text{ и } k(x, T) \geq 0,$$

$$k(x, 0) < 0 \text{ и } k(x, T) < 0, \quad k(x, 0) \geq 0 \text{ и } k(x, T) \geq 0$$

для всех $x \in \Omega$. Фиксируем параметр $\lambda > 0$ со свойствами, указанными в формулировке теоремы 1. Тогда найдется $\gamma_0 > 0$ такое, что при $c_0(x) \geq \gamma_0$ для всех

$x \in \Omega$ существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2) такое, что

$$u \in W_2^1(Q_0; W_2^2(0, l)), \quad u \in L_2(Q_0; W_2^3(0, l)), \\ \partial_t k u_t \in L_2((0, T) \times (0, l); W_2^{-1}(\Omega)), \quad \partial_t k u_{ty} \in L_2((0, T) \times (0, l); W_2^{-1}(\Omega)).$$

Решение удовлетворяет оценке

$$\int_Q \left[\frac{\lambda}{2} (\delta_0 |\nabla L_y u|^2 + c_0 |L_y u|^2 + a_0(x) (\alpha(y) |\partial_y L_y u|^2 + \beta(y) |L_y u|^2) \right. \\ \left. + \left(c - \frac{1}{2} k_t + \frac{1}{2} \lambda k \right) |L_y u_t|^2 \right] e^{-\lambda t} dx dt \leq \frac{2}{\delta_1} \|e^{-\frac{\lambda t}{2}} L_y f\|_{L_2(Q)}^2. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что оператор $L_y : L_2(0, l) \rightarrow L_2(0, l)$ с областью определения $D(L_y) = \{u(y) \in W_2^2(0, l) : u(0) = u(l) = 0\}$ самосопряжен и, значит, найдется ортонормированная в $L_2(0, l)$ система собственных функций $\{\varphi_k(y)\}$, отвечающих собственным значениям $\lambda_k > 0$ оператора $-L_y$. Ищем решение задачи в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t, x) \varphi_k(y),$$

где каждую из функций u_k определяем как решение задачи

$$L_0 u_k(x, t) + a_0(x) \lambda_k u_k(x, t) = f_k(x, t) = (f, \varphi_k) = \int_0^l f \varphi_k dy, \quad (12)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{S_0} = 0, \quad u_t|_{P_0^+} = 0, \quad u_t|_{P_T^-} = 0. \quad (13)$$

В силу теоремы 1 решение существует и удовлетворяет оценке

$$\int_{Q_0} \left[\frac{\lambda}{2} (\delta_0 |\nabla u_k|^2 + c_0 |u_k|^2 + a_0 \lambda_k |u_k|^2) + \left(c - \frac{1}{2} k_t + \frac{1}{2} \lambda k \right) |u_{kt}|^2 \right] e^{-\lambda t} dx dt \\ \leq \frac{2}{\delta_1} \|e^{-\frac{\lambda t}{2}} f_k\|_{L_2(Q_0)}^2,$$

где параметр $\lambda > 0$ выбран указанным выше образом. Умножив это неравенство на λ_k^2 и просуммировав неравенства по k , получим

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k^2 \left(\int_{Q_0} \left[\frac{\lambda}{2} (\delta_0 |\nabla u_k|^2 + c_0 |u_k|^2 + a_0 \lambda_k |u_k|^2) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(c - \frac{1}{2} k_t + \frac{1}{2} \lambda k \right) |u_{kt}|^2 \right] e^{-\lambda t} dx dt \right) \leq \frac{2}{\delta_1} \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 \|e^{-\frac{\lambda t}{2}} f_k\|_{L_2(Q_0)}^2. \quad (14)$$

Однако в силу ортонормированности системы $\{\varphi_k\}$ первые три слагаемых в (14) записываются в виде

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k^2 \int_{Q_0} |\nabla u_k|^2 dx dt = \int_Q |\nabla L_y u^N|^2 dx dy dt, \quad u^N = \sum_{k=1}^N u_k \varphi_k,$$

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k^2 \int_{Q_0} c_0(x) |u_k|^2 dx dt = \int_Q c_0(x) |L_y u^N|^2 dx dy dt,$$

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k^3 \int_{Q_0} a_0(x) |u_k|^2 dx dt = \int_Q a_0(x) (\alpha |\partial_y L_y u^N|^2 + \beta |L_y u^N|^2) dx dy dt,$$

Поясним, например, последнее равенство. Оно вытекает из соотношений

$$\int_0^l \alpha |\partial_y L_y u^N|^2 + \beta |L_y u^N|^2 dy = -(L_y^2 u^N, L_y u^N)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^N \lambda_k^2 u_k \varphi_k, \sum_{k=1}^N \lambda_k u_k \varphi_k \right) = \sum_{k=1}^N \lambda_k^3 |u_k|^2.$$

Аналогично расписываются оставшиеся слагаемые в (14). Оценка (14) влечет справедливость оценки (11) для приближенного решения u^N и приближения правой части

$$f^N = \sum_{k=1}^N f_k \varphi_k.$$

Оценка позволяет обосновать сходимость последовательности u^N и выполнение уравнения (1) для предельной функции u , которая также будет удовлетворять оценке (11).

3. Основные результаты

Решение обратной задачи будем искать в классе, описанном в теореме 2. Сейчас считаем, что правая часть в уравнении (1) представима в виде

$$f = f_0(x, y, t) + \sum_{i=1}^m f_i(x, y, t) q_i(x, t).$$

Опишем дополнительные условия на данные. Будем предполагать, что

$$\begin{aligned} f_0 &\in L_2(Q_0; W_2^2(0, l)), \quad f_i \in L_\infty(Q_0; W_2^2(0, l)), \quad i = 1, \dots, m, \\ f_i(x, 0, t) &= f_i(x, l, t) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m, \\ \psi_i(t, x) &\in W_2^1(Q_0) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), \quad \partial_t k \psi_i(t, x) \in L_2(Q_0), \\ \psi_i|_{t=0} &= 0, \quad \psi_i|_{S_0} = 0, \quad \psi_{it}|_{P_0^+} = 0, \quad \psi_{it}|_{P_T^-} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \tag{15}$$

Построим матрицу B с элементами $b_{ij}(t, x) = f_j(x, y_i, t)$. Формула Ньютона — Лейбница и включения (15) влекут, что $b_{ij} \in L_\infty(Q_0)$. Будем предполагать, что найдется постоянная $\delta_2 > 0$ такая, что

$$|\det B| \geq \delta_2 \tag{16}$$

почти всюду в Q_0 . Положим

$$C_B = \|a_0(B^*)^{-1} L_y \vec{f}\|_{L_\infty(Q_0; L_2(0, l))}.$$

Здесь под нормой вектора

$$F = a_0(B^*)^{-1}\vec{f} \quad (f = (f_1, f_2, \dots, f_m))$$

в пространстве $L_2(0, l)$ понимаем норму эвклидовой нормы этого вектора в $L_2(0, l)$. Мы предполагаем в следующей теореме, что параметр λ такой, что справедливы утверждения теорем 1, 2, зафиксирован.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (4)–(7), (15), (16) и одно из условий

$$k(x, 0) \geq 0 \text{ и } k(x, T) < 0, \quad k(x, 0) < 0 \text{ и } k(x, T) \geq 0,$$

$$k(x, 0) < 0 \text{ и } k(x, T) < 0, \quad k(x, 0) \geq 0 \text{ и } k(x, T) \geq 0$$

для всех $x \in \Omega$. Тогда найдется $\gamma_0 > 0$ такое, что при $c_0(x) \geq \gamma_0$ для всех $x \in \Omega$ существует единственное решение задачи (1)–(3) такое, что

$$u \in W_2^1(Q_0; W_2^2(0, l)), \quad u \in L_2(Q_0; W_2^3(0, l)),$$

$$\partial_t k u_t \in L_2((0, T) \times (0, l); W_2^{-1}(\Omega)), \quad \partial_t k u_{ty} \in L_2((0, T) \times (0, l); W_2^{-1}(\Omega)),$$

$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_m) \in L_2(Q_0).$$

В качестве параметра γ_0 можно взять параметр γ_0 такой, что

$$C_B^4 < \frac{\gamma_0}{16m^2} \delta_1^2 M_0 M_1 \lambda^2 \quad (17)$$

и выполнены условия теоремы единственности решений прямой задачи (теорема 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть пара $(u, \vec{q})$ — решение задачи (1)–(3) из класса, указанного в теореме. Тогда определены следы функций $\partial_t k u_t|_{y=y_i}$, $A_0 u|_{y=y_i}$ в смысле пространства $L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$ и

$$\partial_t k u_t|_{y=y_i} = \partial_t k \psi_{it}, \quad A_0 u|_{y=y_i} = A_0 \psi_i.$$

Полагая $y = y_i$ в уравнении (1), получим равенство

$$L_0 \psi_i(x, t) - a_0(x) L_y u|_{y=y_i} = f_0(x, y_i, t) + \sum_{i=1}^m f_i(x, y_i, t) q_i(x, t).$$

Эту совокупность равенств можно переписать в виде

$$B\vec{q} = \vec{F} + a_0 \vec{R}, \quad F_i = L_0 \psi_i(x, t) - f_0(x, y_i, t), \quad R_i = -L_y u|_{y=y_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Выражая отсюда вектор $\vec{q}$ и подставляя его в уравнение (1), придем к равенству

$$L_0 u - a_0 L_y u = \tilde{f}_0 + \langle \vec{f}, a_0 B^{-1} \vec{R} \rangle = \tilde{f}_0 + \langle a_0 (B^*)^{-1} \vec{f}, \vec{R}(u) \rangle, \quad (18)$$

где $\tilde{f}_0 = f_0 + \langle \vec{f}, B^{-1} \vec{F} \rangle$, скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$ и B^* — сопряженная матрица к B . Его также можно переписать в эквивалентном виде (если использовать теорему 2)

$$u - L^{-1} \langle a_0 (B^*)^{-1} \vec{f}, \vec{R}(u) \rangle = L^{-1} \tilde{f}_0. \quad (19)$$

Докажем разрешимость этого уравнения. Воспользуемся стандартной схемой метода продолжения по параметру (например, теоремой 3.13 в [13]). Рассмотрим уравнение с параметром

$$u - \tau L^{-1} \langle a_0 (B^*)^{-1} \vec{f}, \vec{R}(u) \rangle = L^{-1} \tilde{f}_0, \quad \tau \in [0, 1]. \quad (20)$$

Чтобы доказать разрешимость для любого $\tau \in [0, 1]$, достаточно получить оценки для решений этого уравнения, равномерные по параметру $\tau \in [0, 1]$. Равенство (20) также переписывается в виде

$$L_0 u - a_0 L_y u = \tilde{f}_0 + \tau \langle a_0 (B^*)^{-1} \tilde{f}, \vec{R}(u) \rangle = g. \quad (21)$$

Пусть $c_0(x) \geq \gamma_0 > 0$ для всех x . В силу теоремы 2 и условий на коэффициенты для решения уравнения (21) имеем оценку

$$\begin{aligned} \int_Q \left[\frac{\lambda}{2} (\delta_0 |\nabla L_y u|^2 + \gamma_0 |L_y u|^2 + M_0 M_1 |\partial_y L_y u|^2 + \beta(y) |L_y u|^2) \right. \\ \left. + \left(c - \frac{1}{2} k_t + \frac{1}{2} \lambda k \right) |L_y u_t|^2 \right] e^{-\lambda t} dx dt \leq \frac{2}{\delta_1} \|e^{-\frac{\lambda t}{2}} L_y g\|_{L_2(Q)}^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Правая часть оценивается через

$$c(\varepsilon) \|e^{-\frac{\lambda t}{2}} L_y \tilde{f}_0\|_{L_2(Q_0)}^2 + (1 + \varepsilon) \frac{2}{\delta_1} \|e^{-\frac{\lambda t}{2}} \langle a_0 (B^*)^{-1} L_y \tilde{f}, \vec{R}(u) \rangle\|_{L_2(Q)}^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Далее последнее слагаемое оценивается через $\frac{2}{\delta_1} C_B^2 \|e^{-\frac{\lambda t}{2}} |\vec{R}(u)|\|_{L_2(Q_0)}^2 (1 + \varepsilon)$. Каждая из норм $\|e^{-\frac{\lambda t}{2}} L_y u(x, y_i, t)\|_{L_2(Q_0)}^2$, входящая в последнее выражение, в силу равенства

$$v^2(y_i) = \int_0^{y_i} 2v_y(y)v(y) dy \quad (v = L_y u)$$

оценивается через $2\|e^{-\frac{\lambda t}{2}} v_y\|_{L_2(Q)} \|e^{-\frac{\lambda t}{2}} v\|_{L_2(Q)}$. Таким образом, правая часть в (22) оценивается через

$$\begin{aligned} c(\varepsilon) \|e^{-\frac{\lambda t}{2}} L_y \tilde{f}_0\|_{L_2(Q_0)}^2 + \frac{4m}{\delta_1} (1 + \varepsilon) C_B^2 \|e^{-\frac{\lambda t}{2}} v_y\|_{L_2(Q)} \|e^{-\frac{\lambda t}{2}} v\|_{L_2(Q)} \\ \leq c_1(\varepsilon) + \gamma_0 \frac{\lambda}{2} \|e^{-\frac{\lambda t}{2}} v\|_{L_2(Q)}^2 + \frac{8m^2}{\lambda \gamma_0 \delta_1^2} (1 + \varepsilon)^2 C_B^4 \|e^{-\frac{\lambda t}{2}} v_y\|_{L_2(Q)}^2. \end{aligned} \quad (23)$$

В силу неравенства (17) найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\frac{8m^2}{\lambda \gamma_0 \delta_1^2} (1 + \varepsilon)^2 C_B^4 < \frac{M_0 M_1 \lambda}{2}.$$

С учетом (23), этой оценки и неравенства

$$\|v\|_{L_2(Q)} \leq c(t) \|v_y\|_{L_2(Q)}$$

из (22) получим неравенство

$$\begin{aligned} \int_Q \left[\frac{\lambda}{2} \delta_0 |\nabla L_y u|^2 + \varepsilon_1 (|\partial_y L_y u|^2 + |L_y u|^2) + \frac{\delta_1}{2} |L_y u_t|^2 \right] e^{-\lambda t} dx dt \\ \leq c_2 \|e^{-\frac{\lambda t}{2}} L_y \tilde{f}_0\|_{L_2(Q_0)}^2, \end{aligned} \quad (24)$$

где ε_1, c_2 — некоторые положительные постоянные, не зависящие от τ . Таким образом, уравнение разрешимо для любого $\tau \in [0, 1]$ и, в частности, при $\tau = 1$.

Покажем, что полученное решение удовлетворяет условиям (3). В силу определения матрицы B легко увидеть, что

$$\langle \vec{f}, B^{-1} \vec{F} \rangle|_{y=y_i} = F_i, \quad \langle \vec{f}, a_0 B^{-1} \vec{R} \rangle|_{y=y_i} = R_i.$$

Полагая $y = y_i$ в (18), получим, что $L_0 u(x, y_i, t) = L_0 \psi_i$. В силу теоремы 1 заключаем, что $u(x, y_i, t) = \psi_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$. Таким образом, функции $(u, \vec{q})$ с $\vec{q} = B^{-1}(\vec{F} + a_0 \vec{R})$ дают решение задачи (1)–(3). Единственность решения вытекает из линейности задачи и полученных в доказательстве выше оценок. Теорема доказана.

Проведем некоторый анализ условия (17). Параметр M_0 неявным образом входит в постоянную C_B , однако остальные постоянные в этом условии таким свойством не обладают. В частности, условие (17) выполнено, например, если один из параметров M_1 или δ_1 достаточно велик. Кроме того, небольшая модификация доказательства оценки в методе продолжения по параметру показывает, что оценка (а следовательно, утверждение теоремы 3) будут выполнены, если один из параметров l или T достаточно мал. В целом можно сделать вывод, что разрешимость обратной задачи фактически имеет место при тех же условиях, что и разрешимость прямой задачи, и качественно условия разрешимости одинаковы.

Как следствие теоремы 3 в гиперболическом случае имеем следующий результат.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (4), (5), (7), (15), (16) и $k(x, t) > 0$ в $\overline{Q_0}$. Тогда существует единственное решение задачи (1)–(3) такое, что

$$u \in W_2^1(Q_0; W_2^2(0, l)), \quad u \in L_2(Q_0; W_2^3(0, l)),$$

$$u_{tt} \in L_2((0, T) \times (0, l); W_2^{-1}(\Omega)), \quad u_{tty} \in L_2((0, T) \times (0, l); W_2^{-1}(\Omega)),$$

$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_m) \in L_2(Q_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полученное уравнение гиперболическое и, как вытекает из стандартных результатов о разрешимости гиперболических задач, утверждение теоремы 2 имеет место. Утверждение теоремы 3 получается, если повторить ее доказательство, сделав в (1) замену $u = v e^{\lambda t}$. При такой замене уравнение (1) преобразуется в уравнение, в котором младший коэффициент $\tilde{c}_0$ имеет вид $c_0 + \lambda^2 k$, т. е. при больших параметрах λ новый коэффициент $\tilde{c}_0$ достаточно велик, равно как и новый коэффициент $\tilde{a} = a + 2\lambda k$. Постоянная C_B для новых функций $\tilde{f}_i = e^{-\lambda t} f_i$ в правой части не изменится. Следовательно, всегда можно добиться выполнения условия (17) за счет выбора λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема существования регулярного решения задачи (1)–(3) такого, что $u \in W_2^2(Q)$, $\vec{q} \in W_2^1(0, T; L_2(\Omega))$, во многих случаях также может быть получена (например, при выполнении условий на данные, описанных в теореме 1 в [16], в случае, когда $k(x, 0) < 0$, $k(x, T) < 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
2. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1995.
3. Kabanikhin S. I. Inverse and Ill-Posed Problems Theory and Applications. Berlin; Boston: De Gruyter, 2012.
4. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 1999.
5. Belov Ya. Ya. Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.
6. Пятков С. Г., Самков М. Л. О некоторых классах коэффициентных обратных задач для параболических систем уравнений // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 1. С. 155–177.
7. Джамалов С. З. О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянным коэффициентом для многомерного уравнения смешанного типа второго порядка // Мат. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 4. С. 17–27.
8. Джамалов С. З. Линейная обратная задача для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка с нелокальными граничными условиями в трехмерном пространстве // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. № 1. С. 7–13.
9. Сабитов К. Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа. СПб.: Наука, 2016.
10. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Обратная задача для вырождающегося парабологиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Изв. вузов. Математика. 2015. № 1. С. 46–59.
11. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 6. С. 907–918.
12. Megrabov A. G. Forward and inverse problems for hyperbolic, elliptic and mixed type equations. Berlin; Boston: De Gruyter, 2013.
13. Lieberman G. M. Second order parabolic differential equations. Singapore: World Sci. Publ. Co., 1996.
14. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
15. Amann H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces // Glasnik Mat., Ser. III. 2000. V. 35, N 1. P. 161–177.
16. Егоров И. Е. Применение модифицированного метода Галеркина к первой краевой задаче для уравнения смешанного типа // Мат. заметки СВФУ. 2015. Т. 22, № 3. С. 3–10.

Поступила в редакцию 30 октября 2018 г.

После доработки 3 ноября 2018 г.

Принята к публикации 13 ноября 2018 г.

Джамалов Сирожиддин Зухриддинович
Институт математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан
пр. М. Улугбека, 81, Ташкент 100125, Узбекистан
siroj63@mail.ru

Пятков Сергей Григорьевич
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
pyatkov@math.nsc.ru, s-pyatkov@ugrasu.ru

SOME CLASSES OF INVERSE PROBLEMS FOR MIXED TYPE EQUATIONS OF SECOND ORDER

S. Z. Jamalov and S. G. Pyatkov

Abstract: In the Sobolev spaces, we consider the well-posedness questions for the inverse problem of recovering the source function of a mixed type equation of second order. The overdetermination conditions are the values of a solution on a collection of planes of dimension $n - 1$. The unknowns occurring in the right-hand side depend on time and $n - 1$ unknown space variables. Under certain natural conditions on the data of the problem, we obtain existence and uniqueness theorems for generalized solutions to this problem. The conditions on the data almost coincide with those ensuring solvability of the direct problem. The parameter continuation method and a priori estimates are used to validate the results. The method allows us to generalize the results to the case of smoother data and regular solutions.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.100.20550

Keywords: mixed type equation, inverse problem, source function, gas dynamics.

REFERENCES

1. Vragov V. N., Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics [in Russian], Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk (1983).
2. Egorov I. E. and Fedorov V. E., Higher-Order Nonclassical Equations of Mathematical Physics [in Russian], Vychislit. Tsentr SO RAN, Novosibirsk (1995).
3. Kabanikhin S. I., Inverse and Ill-Posed Problems Theory and Applications, De Gruyter, Berlin, Boston (2012).
4. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., and Vasin I. A., Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker, Inc., New York (1999).
5. Belov Ya. Ya., Inverse Problems for Parabolic Equations, VSP, Utrecht (2002).
6. Pyatkov S. G. and Samkov M. L., "On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations," Sib. Adv. Math., **22**, No. 4, 287–302 (2012).
7. Jamalov S. Z., "On correctness of nonlocal edge problem with constant coefficient for multidimensional second order equation of mixed type [in Russian]," Mat. Zamet. SVFU, **24**, No. 4, 17–27 (2017).
8. Jamalov S. Z., "The linear inverse problem for the mixed type equation of second order with nonlocal boundary conditions in three-dimensional space [in Russian]," Vestn. KRAUNC, Fiz.-Mat. Nauki, **17**, No. 1, 7–13 (2017).
9. Sabitov K. B., Direct and Inverse Problems for Mixed Parabolic-Hyperbolic Type Equations [in Russian], Nauka, St. Petersburg (2016).
10. Sabitov K. B. and Sidorov S. N., "Inverse problem for degenerate parabolic-hyperbolic equation with nonlocal boundary condition," Russ. Math., **59**, No. 1, 39–50 (2015).
11. Sabitov K. B. and Safin E. M., "The inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type," Math. Notes, **87**, No. 5–6, 880–889 (2010).
12. Megrabov A. G., Forward and Inverse Problems for Hyperbolic, Elliptic and Mixed Type Equations, De Gruyter, Berlin, Boston (2013).

13. Triebel H., Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, North-Holland Publ., Amsterdam (1978) (North-Holland Math. Library; V. 18).
14. Amann H. "Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces," Glasnik Mat., Ser. III, **35**, No. 1, 161–177 (2000).
15. Lieberman G. M., Second Order Parabolic Differential Equations, World Sci. Publ. Co., Singapore (1996).
16. Egorov I. E., "Application of modified Galerkin method to the first boundary value problem for a mixed type equation [in Russian]," Mat. Zamet. SVFU, **22**, No. 3, 3–10 (2015).

Submitted October 30, 2018

Revised November 3, 2018

Accepted November 13, 2018

Sergey G. Pyatkov
Yugra State University,
16 Chekhov Street, Khanty-Mansyisk 628012, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
`s-pyatkov@ugrasu.ru`, `pyatkov@math.nsc.ru`

Sirozhiddin Z. Jamalov
Uzbekistan Academy of Science V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
81 M. Ulugbek Avenue, Tashkent 100170, Uzbekistan
`siroj63@mail.ru`