

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ
С ВЕРОЯТНОСТЬЮ 1 ДЛЯ НЕКОТОРЫХ
ЗАДАЧ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ
Е. В. Карачанская, А. П. Петрова

Аннотация. Описание динамики некоторых финансовых событий может быть связано со стохастическими дифференциальными уравнениями Ито (СДУ). В работе рассматриваются финансовые модели, которые имеют случайные возмущения, вызванные винеровским и пуассоновским процессами. Построение программных управлений с вероятностью 1 (РСР1) основано на понятии первого интеграла для стохастических динамических систем диффузионного типа со скачками, описываемых уравнениями Ито. В качестве примеров построения РСР1 рассматриваются два вида финансовых моделей: модель инвестиционного портфеля (диффузионная) и модель процентных ставок (диффузионная со скачками). Приведенные примеры сопровождаются численным моделированием.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12766

Ключевые слова: программное управление с вероятностью 1, диффузионное уравнение Ито со скачками, первый интеграл системы уравнений Ито, модель инвестиционного портфеля, модель процентных ставок.

Введение

Поведение реального объекта, функционирующего в условиях естественных шумов, характеризуется некоторой неопределенностью, кроме того, в системах управления сложными системами обычно участвуют люди, для которых характерна некоторая неопределенность поведения. Описание таких систем при помощи детерминистских подходов не всегда отражает действительную картину функционирования объекта [1]. Если детерминированной моделью процесса является дифференциальное уравнение

$$dX(t) = A(t, X(t)) dt,$$

то для получения модели, испытывающей сильные возмущения, вызванные диффузией и скачками, возможно представление в виде обобщенного стохастического дифференциального уравнения Ито (диффузионного уравнения со скачками)

$$dX(t) = A(t, X(t)) dt + B(t, X(t)) dW(t) + \int G(t, X(t), \gamma) \nu(dt, d\gamma), \quad (1)$$

где $W(t)$ — винеровский процесс, $\nu(t, \Delta\gamma)$ — стандартный пуассоновский процесс.

Рассмотрение систем управления с винеровскими и пуассоновскими возмущениями обусловлено наличием белых шумов различной интенсивности и тем фактом, что в случайные моменты времени система может испытывать скачки.

Описание динамики некоторых финансовых событий может быть связано со стохастическими дифференциальными уравнениями Ито (см., например, [2–4]). Область применения СДУ постоянно растет: финансовая математика и экономика, задачи управления [5–7], статистическая физика [8, 9], экология [10], другие открытые системы и т. д.

Обязательное сохранение (с вероятностью 1) необходимых свойств, которые можно рассматривать как первые интегралы стохастических систем [11, 12], при любых сильных возмущениях будет определяться программным управлением с вероятностью 1 [13].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [14]. *Программным управлением с вероятностью 1* (РСР1 — Programmed Control with Probability 1) будем называть такое управление в стохастической системе с сильными возмущениями, которое с вероятностью, равной 1, обеспечивает постоянство характеристик, зависящих от положения системы, в любой момент времени.

1. О построении РСР1 при внесении управления в диффузионную часть

Основу для построения РСР1 дает следующая

Теорема 1 [16]. Пусть $F(t, X, \omega)$ — случайная функция, $F(t, X) \in \mathcal{C}_{t,X}^{1,2}$ и $X(t)$ — решение системы СДУ

$$dX(t) = A(t, X(t))dt + B(t, X(t))dW(t) + \int G(t, X(t), \gamma)\nu(dt, d\gamma), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$X(0) = X_0,$$

где $X \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; $W(t)$ — m -мерный винеровский процесс; $\nu(t, \Delta\gamma)$ — однородная по t мера Пуассона, винеровские процессы $W_k(t)$ и пуассоновская мера $\nu([0; T], \mathcal{A})$, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{F}_t$ -измеримы для любых $t > 0$ и множества $\mathcal{A}$ из σ -алгебры $\mathfrak{B}$ борелевских множеств пространства $\mathbb{R}^{n'}$ и взаимно независимы. Пусть $H(t, X)$ — матрица следующего вида:

$$H(t, X) = \begin{bmatrix} \vec{e}_0 & \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_n \\ \frac{\partial F(t, X)}{\partial t} & \frac{\partial F(t, X)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F(t, X)}{\partial x_n} \\ f_{20} & f_{21} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n,0} & f_{n,1} & \dots & f_{n,n} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где

$$f_{ij} = f_{ij}(t, X) = \frac{\partial f_i(t, X)}{\partial x_j}, \quad i = \overline{2, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad f_{i0} = f_{i0}(t, X) = \frac{\partial f_i(t, X)}{\partial t}$$

— произвольные функции. Если случайная функция $F(t, \mathbf{x}, \omega)$ является стохастическим первым интегралом системы (2), то коэффициенты уравнения (2) и неслучайная функция $F(t, X)$ ¹⁾ связаны следующими соотношениями:

1) коэффициенты

$$B_k(t, X) = \sum_{i=1}^n b_{ik}(t, X) \vec{e}_i, \quad k = \overline{1, m},$$

— столбцы матрицы $B(t, X)$ — принадлежат множеству функций $B_k(t, X) \in \{q_{00} \cdot \det M(t, X)\}$, где $M(t, X)$ — минор, соответствующий элементу $h_{n+1,0}$ матрицы (3);

2) коэффициент $A(t, X)$ принадлежит множеству функций, определяемых условием

$$A(t, X) \in \left\{ R(t, X) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial B_k(t, X)}{\partial X} \right] \cdot B_k(t, \mathbf{x}) \right\},$$

где $R(t, X)$ — матрица-столбец, компоненты которой $r_i(t, \mathbf{x})$, $i = \overline{1, n}$, определяются следующим образом:

$$C^{-1}(t, X) \cdot \det H(t, X) = \vec{e}_0 + \sum_{i=1}^n r_i(t, X) \vec{e}_i;$$

$C(t, X)$ — алгебраическое дополнение элемента $\vec{e}_0$ матрицы $H(t, X)$ и $\det C(t, X) \neq 0$; $\left[\frac{\partial B_k(t, X)}{\partial X} \right]$ — матрица Якоби для векторной функции $B_k(t, X)$;

3) коэффициент

$$G(t, X, \gamma) = \sum_{i=1}^n g_i(t, X, \gamma) \vec{e}_i$$

при пуассоновской мере определяется представлением

$$G(t, X, \gamma) = Y(t, X, \gamma) - X,$$

где $Y(t, X, \gamma)$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial Y(\cdot, \gamma)}{\partial \gamma} = \det \begin{bmatrix} \frac{\vec{e}_1}{\frac{\partial F(t, Y(\cdot, \gamma))}{\partial Y_1}} & \frac{\vec{e}_2}{\frac{\partial F(t, Y(\cdot, \gamma))}{\partial Y_2}} & \cdots & \frac{\vec{e}_n}{\frac{\partial F(t, Y(\cdot, \gamma))}{\partial Y_n}} \\ \varphi_{31}(t, Y(\cdot, \gamma)) & \varphi_{32}(t, Y(\cdot, \gamma)) & \cdots & \varphi_{3n}(t, Y(\cdot, \gamma)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(t, Y(\cdot, \gamma)) & \varphi_{n2}(t, Y(\cdot, \gamma)) & \cdots & \varphi_{nn}(t, Y(\cdot, \gamma)) \end{bmatrix},$$

удовлетворяющее начальному условию $Y(t, X, \gamma)|_{\gamma=0} = X$.

Относительно произвольных функций $f_{ij} = f_{ij}(t, X)$, $\varphi_{ij} = \varphi_{ij}(t, Y(\cdot, \gamma))$ полагаем, что они выбраны таким образом, чтобы каждое семейство функций $\{f_i\}$, $\{\varphi_i\}$, определяемое условиями

$$f_{ij}(t, X) = \frac{\partial f_i(t, X)}{\partial x_j}, \quad \varphi_{ij}(t, Y(\cdot, \gamma)) = \frac{\partial \varphi_i(t, Y(\cdot, \gamma))}{\partial Y_j},$$

¹⁾ В случае, когда рассматриваем конкретную реализацию, т. е. параметр ω в дальнейшем не влияет, неслучайную функцию $F(t, X)$ можно считать детерминированным первым интегралом стохастической системы.

составляло вместе с функцией $F(t, X)$ совокупность независимых функций.

Ранее рассмотренные задачи построения РСР1 относились к задачам с управлением в детерминированной части, при этом множители при винеровском процессе определялись при построении системы стохастических дифференциальных уравнений [13, 14]. Особенностью большинства стохастических моделей в экономике является то, что в них известен коэффициент диффузии (дисперсия волатильности). В финансовых моделях управление часто входит и в диффузионную часть:

$$dX_i(t) = \alpha(t, X(t), u(t, X(t))) dt + \sum_{k=1}^m \beta_{ik}(t, X(t), u(t, X(t))) dW_k(t) + \int g_i(t, X(t), \gamma) \nu(dt, d\gamma), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

что связано с возможностью регулирования волатильности, поэтому рассмотрим задачи построения программного управления с вероятностью 1 для подобных финансовых моделей.

Теорема 2. Пусть случайный процесс $X(t) = \|X_i(t)\| \in \mathbb{R}^n$ является решением системы уравнений вида (4), где $W(t) = \|W_k(t)\|$, $W_k(t)$, $k = 1, \dots, m$, — одномерные независимые винеровские процессы, $\nu(t, \Delta)$ — стандартная пуассоновская мера, $A(t, x) = \|A_i(t, x)\|$, $A_i(t, x) \in \mathcal{C}_{t,x}^{1,2}$, $B(t, x) = \|B_{ik}(t, x)\|$, $B_{ik}(t, x) \in \mathcal{C}_{t,x}^{1,2}$, $G(t, x, \gamma) = \|G_i(t, x, \gamma)\|$, $G_i(t, x, \gamma) \in \mathcal{C}_{t,x,\gamma}^{1,2,1}$. Если функция $F(t, X(t))$, $F(t, x) \in \mathcal{C}_{t,x}^{1,2}$, должна при любых t принимать значение, равное $F(t_0, X(t_0))$, на любых траекториях решений уравнения (4), то возможно построение программных управлений с вероятностью 1 для этой системы. При этом максимальное число управлений детерминированной частью равно n , максимальное число управлений диффузионной части — nm .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для построения программного управления с вероятностью 1 в экономической модели вида (4) необходимо внесение управления одновременно в стохастическую и детерминированную части. Функцию $F(t, X(t))$ будем интерпретировать как первый интеграл этой системы уравнений Ито [15]. Систему (4) можно записать в векторной форме

$$dX(t) = \alpha(t, X(t), u(t, X(t))) dt + \beta(t, X(t), u(t, X(t))) dW(t) + \int g(t, \mathbf{x}(t), \gamma) \nu(dt, d\gamma). \quad (5)$$

По известной функции $F(t, X(t))$, трактуемой как первый интеграл системы СДУ Ито [15], строится система уравнений в соответствии с теоремой 1:

$$dX(t) = A(t, X(t)) dt + B(t, X(t)) dW(t) + \int G(t, X(t), \gamma) \nu(dt, d\gamma). \quad (6)$$

Сопоставление коэффициентов уравнений (6) и (5) (в силу выполнения условий существования и единственности решения СДУ (6)) позволяет определить искомые управления. В системе (6) определяются как коэффициенты в

детерминированной части, так и коэффициенты в диффузионной части. Для возможности применения теоремы 1 без изменения при этом смысла исходной управляемой системы необходимо введение управления в детерминированную часть всех n уравнений. Таким образом, максимальное количество управлений для детерминированной части равно n . В стохастической части вектор-столбец $B(t, X(t))$ с n элементами умножается на m -мерный винеровский процесс $W(t)$. Рассуждая аналогично предыдущему, можно обнаружить, что общее количество слагаемых в стохастической части будет равно nm . Таким образом, максимальное количество управлений в нем будет nm . $\square$

2. Управление инвестиционным портфелем

Рассматривается возможность применения программного управления с вероятностью 1 [14] для задачи финансовой математики. Для стратегии дублирования модели ведения бизнеса и дублирующего портфеля, полученной из классической модели Блэка — Шоулза [4] и представленной системой стохастических уравнений Ито

$$\begin{aligned} dS(t) &= [\mu_1(t, S(t), Y(t)) + Z_1(t, S(t), Y(t))] dt \\ &\quad + [\sigma_1(t, S(t), Y(t)) + Z_3(t, S(t), Y(t))] dW(t), \\ dY(t) &= [\mu_2(t, S(t), Y(t)) + Z_2(t, S(t), Y(t))] dt \\ &\quad + [\sigma_2(t, S(t), Y(t)) + Z_4(t, S(t), Y(t))] dW(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс, $Y(t) = X^\pi(t)$ — динамика инвестиционного портфеля $X(t)$ при заданной стратегии π , $S(t)$ — цена акций, $\mu_i(t, S(t), Y(t))$, $\sigma_i(t, S(t), Y(t))$, $i = 1, 2$, — заданные функции, необходимо построить РСР1 такое, что для любого t

$$F(t, S(t), Y(t)) = F(0, S(0), Y(0))$$

для заданной функции $F(t, S(t), Y(t))$.

В соответствии с теоремой 3.9 из [14] сначала построим систему стохастических дифференциальных уравнений, в качестве первого интеграла которой возьмем нужную функцию, например, пусть

$$F(t, s, y) = ye^{-2s} \text{ и } F(t, S(t), Y(t)) = F(0, S(0), Y(0)) = 1.$$

Теперь в соответствии с теоремой 1 строим матрицу B (в данном случае вектор-столбец, поскольку $W(t)$ — одномерный винеровский процесс):

$$B = q_{00}(e^{-2S(t)}, 2Y(t)e^{-2S(t)}),$$

где $q_{00} = q_{00}(t, S(t), Y(t))$, и определяем второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial B(t, S(t), Y(t))}{\partial(S(t), Y(t))} \right] &= q_{00} \begin{bmatrix} -2e^{-2S(t)} & 0 \\ -4Y(t)e^{-2S(t)} & 2e^{-2S(t)} \end{bmatrix}, \\ \left[\frac{\partial B(t, S(t), Y(t))}{\partial(S(t), Y(t))} \right] B(t, S(t), Y(t)) &= q_{00}^2 \begin{bmatrix} -2te^{-4S(t)} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Строим матрицу H и вычисляем ее определитель

$$\begin{aligned} \det H &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_0 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ 0 & -2Y(t)e^{-2S(t)} & e^{-2S(t)} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \\ &= \vec{e}_0 \cdot (-2Y(t)e^{-2S(t)}f_3 - e^{-2S(t)}f_2) + \vec{e}_1 \cdot e^{-2S(t)}f_1 + \vec{e}_2 \cdot 2Y(t)e^{-2S(t)}f_1, \end{aligned}$$

где $f_i = f_i(t, S(t), Y(t))$, $i = 1, 2, 3$. Тогда вектор $A = A(t, S(t), Y(t))$ имеет координаты

$$a_1 = -\frac{f_1}{2Y(t)f_3 + f_2} - 2q_{00}^2 t e^{-4S(t)}, \quad a_2 = -\frac{2Y(t)f_1}{2Y(t)f_3 + f_2}$$

при условии $2Y(t)f_3 + f_2 \neq 0$ и система стохастических дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} dS(t) &= \left(-\frac{f_1}{2Y(t)f_3 + f_2} - 2q_{00}^2 t e^{-4S(t)} \right) dt + q_{00} e^{-2S(t)} dW(t), \\ dY(t) &= -\frac{2Y(t)f_1}{2Y(t)f_3 + f_2} dt + 2q_{00} Y(t) e^{-2S(t)} dW(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, приравнивая коэффициенты уравнений (7) и (8), получаем выражения для управлений для детерминированной части:

$$\begin{aligned} Z_1(t, S(t), Y(t)) &= -\frac{f_1}{2Y(t)f_3 + f_2} - 2q_{00}^2 t e^{-4S(t)} - \mu_1(t, S(t), Y(t)), \\ Z_2(t, S(t), Y(t)) &= -\frac{2Y(t)f_1}{2Y(t)f_3 + f_2} - \mu_2(t, S(t), Y(t)), \end{aligned}$$

и диффузионной части:

$$\begin{aligned} Z_3(t, S(t), Y(t)) &= q_{00} e^{-2S(t)} - \sigma_1(t, S(t), Y(t)), \\ Z_4(t, S(t), Y(t)) &= 2q_{00} Y(t) e^{-2S(t)} - \sigma_1(t, S(t), Y(t)). \end{aligned}$$

Таким образом, искомый набор управлений найден.

Для проведения численного моделирования с помощью метода Эйлера [18, 19] решения системы СДУ и определения значений сохраняемой функции положим, что

$$\begin{aligned} dS(t) &= [S(t)e^{-S(t)} + Z_1(t, S(t), Y(t))] dt \\ &\quad + [S(t) + e^{-2t} + Z_3(t, S(t), Y(t))] dW(t), \\ dY(t) &= [Y(t)S(t) + e^{-2S(t)} + Z_2(t, S(t), Y(t))] dt \\ &\quad + [e^{-t} + Z_4(t, S(t), Y(t))] dW(t), \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда имеем набор управлений

$$Z_1(t, S(t), Y(t)) = -\frac{f_1}{2Y(t)f_3 + f_2} - 2q_{00}^2 t e^{-4S(t)} - S(t)e^{-S(t)},$$

$$\begin{aligned} Z_2(t, S(t), Y(t)) &= -\frac{2Y(t)f_1}{2Y(t)f_3 + f_2} - Y(t)S(t) - e^{-2S(t)}, \\ Z_3(t, S(t), Y(t)) &= q_{00}e^{-2S(t)} - S(t) - e^{-2t}, \\ Z_4(t, S(t), Y(t)) &= 2q_{00}Y(t)e^{-2S(t)} - e^{-t}. \end{aligned}$$

В качестве произвольных функций $f_i(t, S(t), Y(t))$, $i = 1, 2, 3$, и $q_{00}(t, S(t), Y(t))$ были взяты

$$\begin{aligned} f_1(t, S(t), Y(t)) &= \sin S(t) + \cos Y(t), \quad f_2(t, S(t), Y(t)) = \cos t + 2, \\ f_3(t, S(t), Y(t)) &= \frac{1}{Y(t)}, \quad q_{00}(t, S(t), Y(t)) = S(t). \end{aligned}$$

3. Управление двумя облигациями

Пусть портфель состоит из двух облигаций, подверженных воздействию винеровского процесса и совершающих скачки под действием пуассоновского процесса

$$\begin{aligned} dR_1(t) &= [\mu_1(t, R_1(t), R_2(t)) + Z_1(t, R_1(t), R_2(t))] dt \sigma_1(t, R_1(t), R_2(t)) dW(t) \\ &\quad + \int g_1(t, R_1(t), R_2(t), \gamma) \nu(dt, d\gamma), \\ dR_2(t) &= [\mu_2(t, R_1(t), R_2(t)) + Z_2(t, R_1(t), R_2(t))] dt + \sigma_2(t, R_1(t), R_2(t)) dW(t) \\ &\quad + \int g_2(t, R_1(t), R_2(t), \gamma) \nu(dt, d\gamma), \end{aligned} \quad (10)$$

где $R_i(t)$ — процентная ставка облигации $i = \overline{1, 2}$, $W_k(t)$ — двумерный винеровский процесс, $\nu(t, \Delta\gamma)$ — стандартная пуассоновская мера на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, $\mu_i(t, R_1(t), R_2(t))$, $\sigma_i(t, R_1(t), R_2(t))$, $i = 1, 2$, — заданные функции. Найдем такие управления, чтобы с вероятностью 1 функция риска $F(t, R_1(t), R_2(t))$ сохраняла постоянное значение, зависящее от начальных данных: $R_1(0) = 0$, $R_2(0) = 0$.

Пусть $F(t, R_1(t), R_2(t)) = R_2(t)e^{-2R_1(t)} + e^{-2}$, тогда

$$F(t, R_1(t), R_2(t)) = F(0, R_1(0), R_2(0)) = e^{-2}.$$

В соответствии с теоремой 1 сначала нужно построить систему стохастических дифференциальных уравнений, для которой функция $F(t, R_1(t), R_2(t))$ является детерминированным первым интегралом.

Из утверждения 3 теоремы 1 определим коэффициент при пуассоновской мере. Для этого сначала найдем частные производные функции $F(t, s_1, s_2) = s_2e^{-2s_1} + e^{-2}$. Они имеют следующий вид (s_1 и s_2 — вспомогательные переменные):

$$\frac{\partial F(t, s_1, s_2)}{\partial s_1} = -2s_2e^{-2s_1}, \quad \frac{\partial F(t, s_1, s_2)}{\partial s_2} = e^{-2s_1}. \quad (11)$$

Тогда

$$\frac{\partial s(t, R_1(t), R_2(t), \gamma)}{\partial \gamma} = \left[\frac{\frac{\partial s_1(t, R_1(t), R_2(t), \gamma)}{\partial \gamma}}{\frac{\partial s_2(t, R_1(t), R_2(t), \gamma)}{\partial \gamma}} \right] = \left[\frac{e^{-2s_1}}{2s_2e^{-2s_1}} \right].$$

Решая эту систему, получаем

$$\begin{aligned} s_1(t, R_1(t), R_2(t), \gamma) &= \frac{1}{2} \ln(2\gamma + 2C_1(R_1(t), R_2(t))), \\ s_2(t, R_1(t), R_2(t), \gamma) &= C_2(R_1(t), R_2(t))(\gamma + C_1(R_1(t), R_2(t))), \end{aligned}$$

и с учетом начальных данных, т. е. $s(t, R_1(t), R_2(t), \gamma)|_{\gamma=0} = R$,

$$C_1(R_1(t), R_2(t)) = \frac{1}{2}e^{2R_1(t)}, \quad C_2(R_1(t), R_2(t)) = 2R_2(t)e^{-2R_1(t)}$$

или

$$\begin{aligned} s_1(t, R_1(t), R_2(t), \gamma) &= \frac{1}{2} \ln(2\gamma + e^{2R_1(t)}), \\ s_2(t, R_1(t), R_2(t), \gamma) &= 2R_2(t)\gamma e^{-2R_1(t)} + R_2(t). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} g_1(t, R_1(t), R_2(t), \gamma) &= \frac{1}{2} \ln(2\gamma + e^{2R_1(t)}) - R_1(t), \\ g_2(t, R_1(t), R_2(t), \gamma) &= 2R_2(t)\gamma e^{-2R_1(t)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Далее строим матрицу B :

$$B = q_{00}(e^{-2R_1(t)}, 2R_2(t)e^{-2R_1(t)}),$$

где $q_{00} = q_{00}(\cdot) = q_{00}(t, R_1(t), R_2(t))$, и определяем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial B(\cdot)}{\partial R(t)} \right] &= q_{00} \begin{bmatrix} -2e^{-2R_1(t)} & 0 \\ -4R_2(t)e^{-2R_1(t)} & 2e^{-2R_1(t)} \end{bmatrix}, \\ \left[\frac{\partial B(\cdot)}{\partial R(t)} \right] B(\cdot) &= q_{00}^2 \begin{bmatrix} -2e^{-4R_1(t)} & \\ 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2r_{00}^2 e^{-4R_1(t)} & \\ 0 & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь строим матрицу H и вычисляем ее определитель:

$$\begin{aligned} \det H &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_0 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ 0 & -2R_2(t)e^{-2R_1(t)} & e^{-2R_1(t)} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \\ &= \vec{e}_0(-2f_3R_2(t)e^{-2R_1(t)} - f_2e^{-2R_1(t)}) + \vec{e}_1(f_1e^{-2R_1(t)}) + \vec{e}_2(2f_1R_2(t)e^{-2R_1(t)}), \end{aligned}$$

где $f_i = f_i(t, R_1(t), R_2(t))$, $i = 1, 2, 3$. Координаты вектора $A = A(t, R_1(t), R_2(t))$ таковы:

$$a_1 = -\frac{f_1}{f_2 + 2f_3R_2(t)} - 2q_{00}^2e^{-4R_1(t)}, \quad a_2 = -\frac{2f_1R_2(t)}{f_2 + 2f_3R_2(t)}$$

при условии $f_2 + 2f_3R_2(t) \neq 0$, и система уравнений Ито имеет вид

$$\begin{aligned} dR_1(t) &= \left[-\frac{f_1(t, R_1(t), R_2(t))}{f_2(t, R_1(t), R_2(t)) + 2f_3(t, R_1(t), R_2(t))R_2(t)} - 2q_{00}^2e^{-4R_1(t)} \right] dt \\ &\quad + q_{00}e^{-2R_1(t)} dW(t) + \int \left(\frac{1}{2} \ln(2\gamma + e^{2R_1(t)}) - R_1(t) \right) \nu(dt, d\gamma), \\ dR_2(t) &= \left[-\frac{2f_1(t, R_1(t), R_2(t))R_2(t)}{f_2(t, R_1(t), R_2(t)) + 2f_3(t, R_1(t), R_2(t))R_2(t)} \right] dt \\ &\quad + 2q_{00}R_2(t)e^{-2R_1(t)} dW(t) + \int 2R_2(t)\gamma e^{-2R_1(t)} \nu(dt, d\gamma). \end{aligned} \tag{13}$$

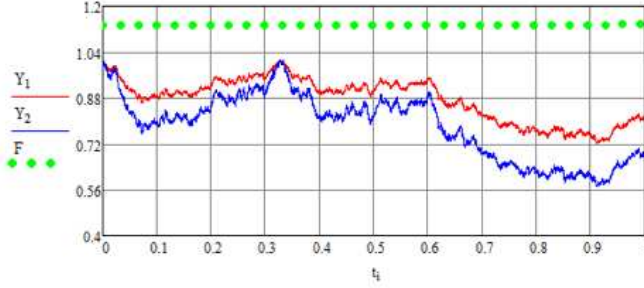


Рис. 1. Решение построенной СДУ (8) и значения функции $F(t, S(t), Y(t))$

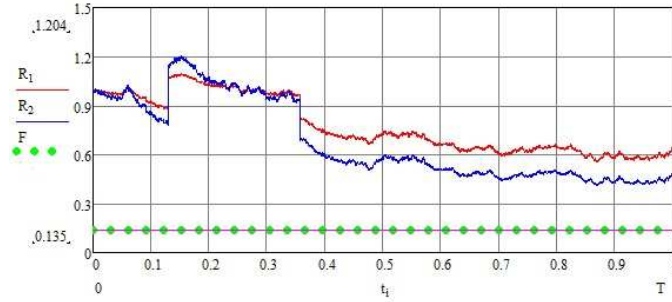


Рис. 2. Решение построенной СДУ (13) и значения функции $F(t, R_1(t), R_2(t))$

Искомое множество управлений детерминированной частью получим из сопоставления уравнений (10) и (13):

$$Z_1(\cdot) = -\frac{f_1(t, R_1(t), R_2(t))}{f_2(t, R_1(t), R_2(t)) + 2f_3(t, R_1(t), R_2(t))R_2(t)} - 2q_{00}^2 e^{-4R_1(t)} - \mu_1(t, R_1(t), R_2(t)),$$

$$Z_2(\cdot) = -\frac{2f_1(t, R_1(t), R_2(t))R_2(t)}{f_2(t, R_1(t), R_2(t)) + 2f_3(t, R_1(t), R_2(t))R_2(t)} - \mu_2(t, R_1(t), R_2(t)).$$

Сопоставляя уравнения (10) и (13), видим, что необходимо ввести дополнительно управление в диффузионную часть — корректирующие функции:

$$Z_3(\cdot) = q_{00}e^{-2R_1(t)} - \sigma_1(t, R_1(t), R_2(t)),$$

$$Z_4(\cdot) = 2q_{00}R_2(t)e^{-2R_1(t)} - \sigma_2(t, R_1(t), R_2(t)).$$

Для численного моделирования возьмем

$$\mu_1(t, R_1(t), R_2(t)) = R_1(t) + R_2(t) + e^{-t}, \quad \mu_2(t, R_1(t), R_2(t)) = R_1(t)R_2(t) + e^{-2t},$$

$$\sigma_1(t, R_1(t), R_2(t)) = e^{R_1(t)}, \quad \sigma_2(t, R_1(t), R_2(t)) = e^{R_2(t)},$$

в качестве произвольных функций —

$$\begin{aligned} f_1(t, R_1(t), R_2(t)) &= \sin R_1(t) + \cos R_2(t), & f_2(t, R_1(t), R_2(t)) &= \cos t + 2, \\ f_3(t, R_1(t), R_2(t)) &= \frac{1}{R_2(t)}, & q_{00}(t, R_1(t), R_2(t)) &= R_1(t). \end{aligned}$$

Как видно из рис. 1 и 2, приведенный алгоритм построения РСР1 действительно позволяет с вероятностью 1 в любой момент времени сохранять значение функции, зависящей от пространственного положения динамической системы.

4. Заключение

Построены программные управления с вероятностью 1 (РСР1) для модели инвестиционного портфеля, а также для модели с двумя облигациями. Доказана теорема о размерности РСР1 в моделях, имеющих управления как в детерминированной, так и в диффузионной части.

Численное моделирование решения систем СДУ дает возможность наглядного представления траекторий системы, описывающей изменение фазовых переменных при наличии РСР1, и соответствующее этому поведению сохранение заданного значения некоторой функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубко В. А. Открытые динамические системы и их моделирование // Вестн. ДВО РАН. 1993. № 4–5. С. 55–64.
2. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Факты, модели. Теория. М.: ФАЗИС. 2004. Т. 1, 2.
3. Kohlmann, M., Siyuan, L., Xiong, Dewen. A Generalized Itô–Ventzell formula to derive forward utility models in a jump market // Stochastic Anal. Appl. 2013. V. 31, N 4. P. 632–662.
4. Delong L. Backward stochastic differential equations with jumps and their actuarial and financial applications. Longon: Springer-Verl., 2013.
5. Колмановский В. Б. Задачи управления при неполной информации. Соровский образовательный журнал. 1999. № 4. С. 122–127.
6. Хрусталев М. М., Румянцев Д. С. Оптимизация квазилинейных динамических стохастических систем со сложной структурой // Автоматика и телемеханика. 2011. № 10. С. 154–169.
7. Хрусталев М. М., Румянцев Д. С., Царьков К. А. Оптимизация квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению // Автоматика и телемеханика. 2017. № 6. С. 84–105.
8. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. Т. 1.
9. Климонтович Ю. Л. Нелинейное броуновское движение // Успехи физ. наук. 1994. Т. 164. № 8. С. 811–844.
10. Дубко В. А. О моделирование динамики подсистемы в многоэлементных взаимодействиях системах и построение стохастического уравнения самодиффузии // Вестн. Приамур. гос. ун-та им. Шолом-Алейхема. 2016. № 1. С. 100–104.
11. Дубко В. А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1989.
12. Дубко В. А. Специальные разделы теории стохастических дифференциальных уравнений. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013.
13. Карачанская Е. В. Построение программных управлений динамической системы на основе множества ее первых интегралов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. № 42. С. 125–133.

14. Карачанская Е. В. Интегральные инварианты стохастических систем и программное управление с вероятностью 1. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2015.
15. Дубко В. А., Карачанская Е. В. Стохастические первые интегралы, ядра интегральных инвариантов и уравнения Колмогорова // Дальневост. мат. журн. 2014. Т. 13. № 2. С. 200–216.
16. Карачанская Е. В. Построение множества дифференциальных уравнений с заданным множеством первых интегралов // Вестн. Тихоокеан. гос. ун-та. 2011. № 3. С. 47–56.
17. Карачанская Е. В. Обобщенная формула Ито — Вентцеля для случая нецентрированной пуассоновской меры, стохастический первый интеграл и первый интеграл // Мат. тр. 2014. Т. 17. № 1. С. 99–122.
18. Averina T., Karachanskaya E., Rybakov K. Statistical modelling of random processes with invariants // Proc. 2017 Intern. Multi-Conf. on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). 18–22 Sep., 2017. Novosibirsk, Akademgorodok, Russia. P. 34–37.
19. Аверина Т. А., Карачанская Е. В., Рыбаков К. А. Моделирование и анализ линейных инвариантных стохастических систем // Дифференц. уравнения и процессы управления. Электрон. журн. 2018. № 1. С. 54–76. Режим доступа: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.

Статья поступила 12 января 2018 г.

Карачанская Елена Викторовна
Дальневосточный гос. университет путей сообщения,
ул. Серышева, 47, Хабаровск, 680027;
Тихоокеанский гос. университет,
ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск, 680035
elena_chal@mail.ru

Петрова Алена Петровна
Северо-Восточный федеральный университет,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
alyona.petrova393@gmail.com

MODELING OF THE PROGRAMMED
CONTROL WITH PROBABILITY 1
FOR SOME FINANCIAL TASKS

E. V. Karachanskaya and A. P. Petrova

Abstract: The description of the dynamics of some financial events can be related to Itô stochastic differential equations (SDE). In this paper, we consider a financial model affected by random disturbances which take the form of Wiener and Poisson perturbations. The construction of the programmed control with probability 1 (PCP1) is based on the concept of first integral for stochastic dynamic systems of diffusion type with jumps which are described by the Itô equations. Two types of financial models are considered as examples of the construction of PCP1: the investment portfolio model (diffusion model) and the interest rate model (diffusion with jumps). The given examples are accompanied by numerical modeling.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12766

Keywords: programmed control with probability 1, stochastic Itô's equation with jumps, first integral of system of the Itô equations, investment portfolio model, interest rate model.

REFERENCES

1. Dubko V., "Open dynamic systems and its simulation [in Russian]," Vestn. Dal'nevost. Otdel. Ross. Akad. Nauk, No. 4–5, 55–64 (1993).
2. Shiryaev A. N., Essentials of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory, World Sci. Publ. Co. Inc., River Edge, NJ (1999) (Adv. Ser. Stat. Sci. Appl. Probab.; V. 3)
3. Kohlmann M., Siyuan L., and Xiong Dewen, "A generalized Itô–Wentzell formula to derive forward utility models in a jump market," Stochastic Anal. Appl., **31**, No. 4, 632–662 (2013).
4. Delong L., Backward Stochastic Differential Equations with Jumps and Their Actuarial and Financial Applications, Springer-Verlag, Longon (2013).
5. Kolmanovsky V. B., "Control problems with incomplete information [in Russian]," Soros Edu. J., No. 4, 122–127 (1999).
6. Khrustalev M. M. and Rumyantsev D. S., "Optimizing quasilinear stochastic dynamical systems with complex structure," Autom. Remote Control, **72**, No. 10, 2147–2160 (2011).
7. Khrustalev M. M., Rumyantsev D. S., and Tsar'kov K. A., "Optimization of quasilinear stochastic control-nonlinear diffusion systems," Autom. Remote Control, **78**, No. 6, 1028–1045 (2017).
8. Balescu R., Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics, John Wiley and Sons, Univ. Michigan (1975).
9. Klimontovich Yu. L., "Nonlinear Brownian motion [in Russian]," Uspekhi Fiz. Nauk, **164**, No. 8, 811–844 (1994).
10. Dubko V. A., "On modeling of subsystem dynamics in multi-element interacting systems and constructing a stochastic self-diffusion equation [in Russian]," Vestn. Priamursk. Gos. Univ., No. 1, 100–104 (2016).

11. Dubko V. A., Questions about Theory and Applications of the Stochastic Differential Equations [in Russian], Dal'nauka, Vladivostok (1989).
12. Dubko V. A. and Karachanskaya E. V., Special Sections of the Theory of Stochastic Differential Equations [in Russian], Izdat. Dal'nevost. Natsion. Univ., Khabarovsk (2013).
13. Karachanskaya E. V., "Construction of programmed controls for a dynamic system based on the set of its first integrals," J. Math. Sci., **199**, No. 5, 547–555 (2014).
14. Karachanskaya E. V., Integral Invariants of Stochastic Systems and Programmed Control with Probability 1 [in Russian], Izdat. Dal'nevost. Natsion. Univ., Khabarovsk (2015).
15. Dubko V. A. and Karachanskaya E. V., "Stochastic first integrals, kernel functions for integral invariants and the Kolmogorov equations [in Russian]," Dal'nevost. Mat. Zh., **14**, No. 2, 200–216 (2014).
16. Karachanskaya E. V., "Construction of the set of differential equations with a given set of first integrals [in Russian]," Vestn. Dal'nevost. Natsion. Univ., No. 3, 47–56 (2011).
17. Karachanskaya E. V., "The generalized Itô–Wenttsel formula in the case of a noncentered Poisson measure, a stochastic first integral, and a first integral," Sib. Adv. Math., **17**, No. 1, 99–122 (2014).
18. Averina T. A., Karachanskaya E. V., and Rybakov K. A., "Statistical modelling of random processes with invariants," in: Proc. Int. Multi-Conf. Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON) (Akademgorodok, Novosibirsk, Russia, Sep. 18–22, 2017), pp. 34–37, IEEE (2017).
19. Averina, T.A., Karachanskaya E. V., and Rybakov K. A., "Modeling and analysis of linear invariant stochastic systems," Differ. Equ. Control Processes, Online J., No. 1, 54–76 (2018). <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

Submitted January 12, 2018

Elena V. Karachanskaya
Far Eastern State Transport University,
47 Serysheva Street, Khabarovsk 680027, Russia;
Pacific National University,
136 Tikho-Okeanskaya Street, Khabarovsk 680035, Russia
elena_chal@mail.ru

Alena P. Petrova
North-Eastern Federal University,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677000, Russia
alyona.petrova393@gmail.com