

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ
ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
В ЛЕБЕГОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ
М. Г. Гадоев, Ф. С. Исхоков

Аннотация. В пространстве $L_p(\Omega)$, где $1 < p < +\infty$ и Ω — произвольная (ограниченная или неограниченная) область n -мерного евклидова пространства R_n , исследуется относительная ограниченность одного класса дифференциальных операторов с частными производными недивергентного вида высшего порядка. Исследуемые операторы имеют нестепенное вырождение вдоль всей границы области Ω , и вырождение по каждой независимой переменной характеризуется с помощью разных функций.

В работах, опубликованных ранее по этому направлению, обычно сначала задавался исследуемый оператор в области Ω и затем в этой области определялись функции, с помощью которых характеризуются вырождения коэффициентов исследуемого оператора. Эти функции имели одинаковое поведение вблизи границы по разным независимым переменным.

В отличие от этого, в настоящей работе область Ω и функции, которые характеризуют вырождения коэффициентов дифференциального оператора, задаются в паре друг с другом и предполагается выполнение «условия погружения», введенного ранее П. И. Лизоркиным. При этом дифференцируемость функций, с помощью которых определяется вырождение исследуемого оператора, не требуется.

Исследование относительной ограниченности дифференциальных операторов является одним из основных направлений теории таких операторов, и результаты, полученные в этом направлении, имеют широкое применение в теории вложения нормированных пространств дифференцируемых функций многих переменных, теории разделимости дифференциальных операторов, спектральной теории дифференциальных операторов и т.д.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12764

Ключевые слова: дифференциальный оператор с частными производными, нестепенное вырождение, относительная ограниченность операторов, разбиение единицы.

0. Введение

Работа посвящена исследованию относительной ограниченности одного класса дифференциальных операторов с частными производными недивергентного вида в произвольной (ограниченной или неограниченной) области Ω n -мерного евклидова пространства с нестепенным вырождением на границе области в пространстве $L_p(\Omega)$. Результаты об относительной ограниченности диф-

ференциальных операторов применяются в теории разделимости дифференциальных операторов, теории вложения нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных, спектральной теории дифференциальных операторов (см., например, [1–17] и имеющуюся в них библиографию).

В настоящей работе, так же как в работе авторов [18], область Ω и функции, которые характеризуют вырождения коэффициентов дифференциального оператора, задаются в паре друг с другом и предполагается выполнение «условия погружения», введенного П. И. Лизоркиным в работе [19]. При этом вырождения коэффициентов дифференциального оператора по разным независимым переменным характеризуются с помощью разных функций и дифференцируемость функций, с помощью которых определяется вырождение исследуемого оператора, не требуется.

1. Формулировка основного результата

Пусть Ω — произвольное открытое множество в n -мерном евклидовом пространстве R_n , и пусть $\Pi(0)$ — единичный куб с центром в начале системы координат. Для любой точки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R_n$ и любого вектора $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\vec{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\vec{t}}(\xi) = \{x \in R_n : ((x_1 - \xi_1)/t_1, (x_2 - \xi_2)/t_2, \dots, (x_n - \xi_n)/t_n) \in \Pi(0)\}.$$

Пусть $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, — определенные в Ω положительные функции. Положим $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi) = \Pi_{\xi \vec{g}(\xi)}(\xi)$, где $\varepsilon > 0$ и $\vec{g}(\xi) = (g_1(\xi), g_2(\xi), \dots, g_n(\xi))$.

Предполагается, что множество Ω и функции $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, связаны следующим условием.

(А) Существует постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такая, что для всех $\xi \in \Omega$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi)$ содержится в Ω для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Условие (А) является аналогом условия погружения, введенного в [19]. В этой работе также рассмотрены примеры областей Ω и положительных функций $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющих условию погружения.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$L(x, D_x) = \sum_{|k| \leq 2r} a_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega), \quad (1)$$

где $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ — мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ — длина мультииндекса,

$$D_x^k = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{k_1} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{k_n}$$

и i — мнимая единица.

Символом $B(\tau, \vec{g}, \Omega)$, где τ — положительное число, обозначим класс символов

$$L(x, s) = \sum_{|k| \leq 2r} a_k(x) s^k \quad (x \in \Omega, s \in R_n)$$

с измеримыми коэффициентами, удовлетворяющими следующим условиям:

- (I) $\inf_{x \in \Omega, s \in R_n} |L(x, s)| = \delta \neq 0$
 (II) $|a_k(x)s^{k'}| \leq \tau g_1^{-k_1''}(x) g_2^{-k_2''}(x) \dots g_n^{-k_n''}(x) |L(x, s)|$
 для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$, $k = k' + k''$, $k'' \neq 0$, $|k| \leq 2r$;
 (III) $\sum_{|k| \leq 2r} |(a_k(x) - a_k(y))s^k| \leq \tau |L(x, s)|$ для всех $s \in R_n$ и всех $x, y \in \Omega$
 таких, что $|x_j - y_j| < \varepsilon^2 g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Будем писать $L(x, s) \in \mathbb{B}(\tau, \vec{g}, \Omega)$, если

$$L(x, s) \in B(\tau, \vec{g}, \Omega), \quad D_x^l a_k(x) \in L_{\infty, \text{loc}}(\Omega) \quad (|l| \leq |k| \leq 2r),$$

и выполняется одно из следующих условий:

- (IVa) $L(x, D_x)$ — симметрическое дифференциальное выражение;
 (IVб) имеет место неравенство

$$\sum_{\substack{l+k'+k''=k, \\ k'' \neq 0, |k| \leq 2r}} |(D_x^l a_k(x)) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \dots g_n^{k_n''}(x) s^{k'}| \leq \tau |L(x, s)|$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$.

Наряду с дифференциальным выражением (1) рассмотрим дифференциальное выражение

$$\mathbb{L}(x, D_x) = \sum_{|k| \leq 2r} b_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega) \quad (2)$$

с непрерывными коэффициентами $b_k(x)$ ($x \in \Omega$, $|k| \leq 2r$), удовлетворяющими неравенству

$$\sum_{\substack{k'+k''=k, \\ |k| \leq 2r}} |b_k(x) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \dots g_n^{k_n''}(x) s^{k'}| \leq \mathbb{N} |L(x, s)| \quad (3)$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$; $\mathbb{N}$ — некоторая положительная постоянная.

Теорема. Пусть существует число $\lambda > 0$ такое, что

$$\lambda^{-1} \leq \frac{g_j(x)}{g_j(y)} \leq \lambda, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

для всех $y \in \Omega$ и всех $x \in \Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(y)$, и пусть при некотором $\varkappa > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{|k| \leq 2r} |a_k(x) s^k| \leq \varkappa |L(x, s)| \quad (5)$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$. Пусть также выполняется неравенство (3). Тогда найдется число $\tau_0 = \tau_0(r, n, p, \varkappa, \delta) > 0$, $1 < p < +\infty$, такое, что если $L(x, s) \in B(\tau, \vec{g}, \Omega)$, $0 < \tau < \tau_0^*$, то для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\sum_{|k| \leq 2r} \|b_k(x) D_x^k u(x); L_p(\Omega)\| \leq \mathbb{M} \|L(x, D_x) u(x); L_p(\Omega)\|, \quad (6)$$

где $\mathbb{M} = \mathbb{M}(r, n, p, \varkappa, \mathbb{N})$ — некоторая положительная постоянная. Если же $L(x, s) \in \mathbb{B}(\tau, \vec{g}, \Omega)$, $0 < \tau < \tau_0^*$, то неравенство (6) имеет место также для всех $u(x) \in L_p(\Omega)$ таких, что $L(x, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$.

Напомним определение относительной ограниченности операторов в банаховых пространствах. Пусть X, Y и Z — банаховы пространства и $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$, $B : D(B) \subset X \rightarrow Z$ — некоторые плотно определенные линейные операторы. Оператор B называется *ограниченным относительно оператора A* (или *A -ограниченным*), если $D(A) \subset D(B)$ и существуют постоянные $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ такие, что

$$\|Bu; Z\| \leq \alpha \|u; X\| + \beta \|Au; Y\|$$

для всех $u \in D(A)$.

Пусть операторы (см. (1), (2))

$$L = L(\cdot, D), \quad D(L) = C_0^\infty(\Omega), \quad \text{и} \quad \mathbb{L} = \mathbb{L}(\cdot, D), \quad D(\mathbb{L}) = C_0^\infty(\Omega),$$

допускают замыкание в пространстве $L_p(\Omega)$. Их замыкания обозначим через $L_{(p)}$ и $\mathbb{L}_{(p)}$ соответственно. Тогда в условиях сформулированной выше теоремы если $L(x, s) \in \mathbb{B}(\tau, \vec{g}, \Omega)$, $0 < \tau < \tau_0^*$, то неравенство (6) имеет место для всех $u(x) \in L_p(\Omega)$ таких, что $L(x, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$, и из этого неравенства следует ограниченность оператора $\mathbb{L}_{(p)}$ относительно оператора $L_{(p)}$ в пространстве $L_p(\Omega)$.

2. Доказательство основной теоремы

Отметим, что дифференциальные операторы $L(x, D_x)$, символы которых принадлежат классу $B(\tau, \vec{g}, \Omega)$, ранее изучались в работах авторов [18, 20]. Так же как в этих работах, здесь применяется техника, основанная на следующей лемме о разбиении единицы области Ω .

Лемма 1 (см. [17, лемма 1]). Пусть область Ω и положительные функции $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют сформулированным выше условиям.

Тогда существуют неотрицательные функции $\psi_1, \psi_2, \dots$ из класса $C_0^\infty(\Omega)$ такие, что

$$1) \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m^2(x) \equiv 1 \quad (x \in \Omega);$$

2) покрытие $\{\text{supp } \psi_m\}_{m=1}^{+\infty}$ области Ω имеет конечную кратность $\Lambda(n, \lambda)$, где λ — константа из условия (4);

3) для любого мультииндекса k существует конечное число $M_k > 0$ такое, что

$$|D_x^k \psi_m(x)| \leq M_k g_1^{-k_1}(x) g_2^{-k_2}(x) \dots g_n^{-k_n}(x) \quad (x \in \Omega);$$

4) для всех $x, y \in \text{supp } \psi_m$, $m = 1, 2, \dots$, выполняется неравенство

$$|x_j - y_j| < \varepsilon^2 g_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

5) для любой функции $f \in L_1(\Omega)$ справедливо соотношение

$$\sum_{m=N}^{+\infty} \int_{\Omega} \chi_m(x) f(x) dx \rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty,$$

где $\chi_m(x)$ — характеристическая функция множества $\text{supp } \psi_m$.

Пусть $L(x, s) \in B(\tau, \vec{g}, \Omega)$ и $0 < \tau < \tau_0$, где $\tau_0 = \tau_0(n, r, p, \varkappa) > 0$ — такое же положительное число, как в [20, теорема 1]. Тогда согласно этой теореме замыкание $L_{(p)}$ оператора $L = L(\cdot, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, в пространстве $L_p(\Omega)$ существует и имеет место равенство (см. [18, с. 21])

$$L_{(p)}F_{(p)} = E + \Gamma_{(p)}, \quad (7)$$

где $\Gamma_{(p)}$ — замыкание в $L_p(\Omega)$ некоторого оператора $\Gamma \in \mathcal{L}_p[\Omega]$ такого, что $\|\Gamma\|_p \leq 1/2$, и при этом $D(\Gamma_{(p)}) = L_p(\Omega)$. Здесь и далее символом $\mathcal{L}_p[\Omega]$ обозначено пространство всех линейных операторов, действующих из $C_0^\infty(\Omega)$ в $L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, замыкания которых в пространстве $L_p(\Omega)$ являются ограниченными операторами.

Напомним (см. [18, с. 8]), что $F_{(p)}$ — замыкание в $L_p(\Omega)$ оператора

$$F = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \Phi_m \psi_m, \quad D(F) = C_0^\infty(\Omega), \quad (8)$$

где Φ_m , $m = 1, 2, \dots$, — псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $\Phi_m(s) = L_m^{-1}(s)$ и

$$L_m(s) = \sum_{|k| \leq 2r} a_k(x^{(m,k)}) s^k \quad (s \in R_n), \quad (9)$$

$\{x^{(m,k)}, |k| \leq 2r\}$ — некоторые фиксированные точки из $\text{supp } \psi_m$, $m = 1, 2, \dots$

Ниже докажем неравенство

$$\|b_k D^k F\|_p \leq C_{1,p} < +\infty, \quad |k| \leq 2r. \quad (10)$$

Используя равенство

$$b_k D^k F = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m b_k D^k \Phi_m \psi_m + \sum_{m=1}^{+\infty} [b_k D^k, \psi_m] \Phi_m \psi_m,$$

где символ $[\cdot, \cdot]$ обозначает коммутатор $[T_1, T_2] = T_1 T_2 - T_2 T_1$, представим оператор $b_k D^k F$ в виде

$$b_k D^k F = \mathbb{F}_*^{(k)} + \mathbb{F}_{**}^{(k)}, \quad (11)$$

где

$$\mathbb{F}_*^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m b_k \Phi_m^{(k)} \psi_m, \quad \mathbb{F}_{**}^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} [b_k D^k, \psi_m] \Phi_m \psi_m, \quad (12)$$

$\Phi_m^{(k)}$ — псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^k L_m^{-1}(s)$.

Оценим норму оператора $\mathbb{F}_*^{(k)}$. Для этого представим оператор $\mathbb{F}_*^{(k)}$ в виде

$$\mathbb{F}_*^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m(b_k(x) - b_k(x^{(m,k)}))\Phi_m^{(k)}\psi_m + \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m b_k(x^{(m,k)})\Phi_m^{(k)}\psi_m.$$

Применяя [18, лемма 2], получаем

$$\|\mathbb{F}_*^{(k)}\|_p \leq M_1(\mathbb{C}_{1,k} + \mathbb{C}_{2,k}), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{1,k} &= \sup_{m=1,2,\dots} \|\psi_m(b_k(x) - b_k(x^{(m,k)}))\Phi_m^{(k)}\psi_m\|_p, \\ \mathbb{C}_{2,k} &= \sup_{m=1,2,\dots} \|\psi_m b_k(x^{(m,k)})\Phi_m^{(k)}\psi_m\|_p. \end{aligned}$$

Также с помощью [18, лемма 2] доказывается, что

$$\|\psi_m(b_k(x) - b_k(x^{(m,k)}))\Phi_m^{(k)}\psi_m\|_p \leq M_{11} \sup |(b_k(x) - b_k(x^{(m,k)}))s^k L_m^{-1}(s)|.$$

В этих неравенствах верхняя грань берется по $x \in \text{supp } \psi_m$, $s \in R_n$. Отсюда в силу непрерывности коэффициентов $b_k(x)$, $|k| \leq 2r$, и условия (3) следует, что

$$\|\psi_m(b_k(x) - b_k(x^{(m,k)}))\Phi_m^{(k)}\psi_m\|_p \leq \mathbb{M}_1, \quad (14)$$

где $\mathbb{M}_1$ — некоторое конечное положительное число.

Из условия (3), в частности, следует, что

$$|b_k(x)s^k| \leq \mathbb{N}|L(x, s)|, \quad |k| \leq 2r,$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$. Следовательно,

$$|b_k(x^{(m,k)})s^k| \leq \mathbb{N}|L(x^{(m,k)}, s)|, \quad |k| \leq 2r, \quad m = 1, 2, \dots,$$

для всех $s \in R_n$.

Согласно неравенству (16) из работы [18]

$$|L(x, s)| \leq 2|L_m(s)| \leq 3|L(x, s)|, \quad s \in R_n, \quad x \in \text{supp } \psi_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Отсюда следует, что

$$|L(x^{(m,k)}, s)| \leq 2|L_m(s)| \leq 3|L(x^{(m,k)}, s)|, \quad s \in R_n, \quad m = 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$|b_k(x^{(m,k)})s^k L_m^{-1}(s)| \leq 2\mathbb{N}, \quad |k| \leq 2r, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

для всех $s \in R_n$.

Отметим, что в силу [18, лемма 3] для нормы псевдодифференциального оператора $\Phi_m^{(k)}$ имеет место следующее неравенство:

$$\|\Phi_m^{(k)}\|_p \leq M_p \sup_{s \in R_n} |s^k L_m^{-1}(s)|.$$

Отсюда и из (16) следует, что

$$\|\psi_m b_k(x^{(m,k)})\Phi_m^{(k)}\psi_m\|_p \leq 2\mathbb{N} \quad (17)$$

для всех $|k| \leq 2r$, $m = 1, 2, \dots$.

В силу доказанных неравенств (14), (17) из (13) получим следующую оценку для нормы оператора $\mathbb{F}_*^{(k)}$:

$$\|\mathbb{F}_*^{(k)}\|_p \leq M_{1,p}(\mathbb{M}_1 + 2\mathbb{N}). \quad (18)$$

Переходим к оценке нормы оператора (см. (12)) $\mathbb{F}_{**}^{(k)}$. Так как

$$[b_k D^k, \psi_m] = b_k(x) D^k(\psi_m(x)) - \psi_m(x) b_k(x) D^k,$$

имеет место представление

$$\mathbb{F}_{**}^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{\substack{k'+k''=k, \\ k' \neq 0}} C(k', k'') b_k(x) \psi_m^{(k')} \Phi_m^{(k'')} \psi_m,$$

где $C(k', k'')$ — постоянные числа, $\psi_m^{(k')}(x) = D_x^{k'} \psi_m(x)$ и $\Phi_m^{(k'')}$ — псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^{k''} L_m^{-1}(s)$. Отсюда в силу [18, лемма 2] следует, что

$$\|\mathbb{F}_{**}^{(k)}\|_p \leq \Lambda^{1/p}(n, \lambda) \sum_{\substack{k'+k''=k, \\ k' \neq 0}} \mathbb{C}_{(k', k'')}^{(k)}, \quad (19)$$

где

$$\mathbb{C}_{(k', k'')}^{(k)} = \sup_{m=1, 2, \dots} \|b_k(x) \psi_m^{(k')} \Phi_m^{(k'')} \psi_m\|_p. \quad (20)$$

В силу [18, лемма 3] имеем

$$\|b_k(x) \psi_m^{(k')} \Phi_m^{(k'')} \psi_m\|_p \leq \sup_{x \in \text{supp } \psi_m} \sup_{s \in R_n} |\psi_m^{(k')}(x) b_k(x) s^{k''} L_m^{-1}(s)|.$$

Применяя неравенство (15) и п. 3 леммы 1, получим

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \text{supp } \psi_m} \sup_{s \in R_n} |\psi_m^{(k')}(x) b_k(x) s^{k''} L_m^{-1}(s)| \\ & \leq M_{21} \sup_{x \in \text{supp } \psi_m} \sup_{s \in R_n} |b_k(x) g_1^{k'_1}(x) g_2^{k'_2}(x) \dots g_n^{k'_n}(x) s^{k''} L_m^{-1}(s)| \\ & \leq M_{22} \sup_{x \in \text{supp } \psi_m} \sup_{s \in R_n} |b_k(x) g_1^{k'_1}(x) g_2^{k'_2}(x) \dots g_n^{k'_n}(x) s^{k''} L^{-1}(x, s)|. \end{aligned}$$

Отсюда в силу условия (3) следует, что

$$\sup_{x \in \text{supp } \psi_m} \sup_{s \in R_n} |\psi_m^{(k')}(x) b_k(x) s^{k''} L_m^{-1}(s)| \leq M_{22} \mathbb{N} < +\infty.$$

Таким образом (см. (19), (20)), существует конечное положительное число $\mathbb{M}_{2,p}$, $1 < p < +\infty$, такое, что

$$\|\mathbb{F}_{**}^{(k)}\|_p \leq \mathbb{M}_{2,p} \quad (21)$$

для всех мультииндексов k таких, что $|k| \leq 2r$.

В силу представления (11) из (18), (21) следует неравенство (10).

Пусть $u(x)$ — произвольная функция из класса $C_0^\infty(\Omega)$. Тогда существует функция (см. (8)) $v(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $Fv = u$. Используя равенство (7),

имеем $Lu = LFv = (E + \Gamma)v$. Так как $\Gamma \in \mathcal{L}_p[\Omega]$ и $\|\Gamma\|_p \leq 1/2$, то $v = (E + \Gamma)^{-1}Lu$. Отсюда и из неравенства (10) имеем

$$\begin{aligned} \|b_k D^k u; L_p(\Omega)\| &= \|b_k D^k Fv; L_p(\Omega)\| \leq C_{1,p} \|v; L_p(\Omega)\| \\ &= C_{1,p} \|(E + \Gamma)^{-1}Lu; L_p(\Omega)\| \leq C_{1,p} \|(E + \Gamma)^{-1}\|_p \|Lu; L_p(\Omega)\|. \end{aligned}$$

Так как $(E + \Gamma)^{-1}$ — ограниченный оператор, то

$$\|b_k D^k u; L_p(\Omega)\| \leq C_{2,p} \|Lu; L_p(\Omega)\| \quad (u \in C_0^\infty(\Omega)), \quad (22)$$

где $C_{2,p}$ — положительная постоянная. Следовательно,

$$\sum_{|k| \leq 2r} \|b_k(x) D_x^k u(x); L_p(\Omega)\| \leq \mathbb{M} \|L(x, D_x)u(x); L_p(\Omega)\|$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$, т. е. неравенство (6) в случае $u \in C_0^\infty(\Omega)$ доказано.

Таким образом, первая часть утверждения основной теоремы доказана. Для доказательства второй части вводим пространство $\mathcal{W}_{p,L}(\Omega)$, которое состоит из всех функций $u(x) \in L_p(\Omega)$ таких, что $L(x, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$. Норма в $\mathcal{W}_{p,L}(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u; \mathcal{W}_{p,L}(\Omega)\| = \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^p dx + \int_{\Omega} |L(x, D_x)u(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Если $L(x, s) \in B(\tau, \vec{g}, \Omega)$ и $0 < \tau < \tau_0$, где $\tau_0 = \tau_0(n, r, p, \kappa) > 0$ — такое же положительное число, как в [18, теорема 1], то согласно этой теореме замыкание $L_{(p)}$ оператора $L = L(\cdot, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, в пространстве $L_p(\Omega)$ существует. Пусть $u \in D(L_{(p)})$. Тогда существует последовательность функций $u_1(x), u_2(x), \dots$ из класса $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $u_j \xrightarrow{p} u$, $Lu_j \xrightarrow{p} L_{(p)}u$. Из (22) следует, что

$$\|b_k D^k(u_i - u_j); L_p(\Omega)\| \leq C_{2,p} \|L(u_i - u_j); L_p(\Omega)\|. \quad (23)$$

Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\|D^k(u_i - u_j); L_p(\Omega_\varepsilon)\| \longrightarrow 0 \quad (i, j \longrightarrow +\infty), \quad (24)$$

где $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : |b_k(x)| > \varepsilon\}$. Так как $u_j \xrightarrow{p} u$, из (24) следует, что в Ω_ε существует обобщенная производная $D_x^k u(x)$ в смысле С. Л. Соболева. Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и непрерывности коэффициентов $b_k(x)$, $|k| \leq 2r$, следует, что обобщенная производная $D_x^k u(x)$ в смысле С. Л. Соболева существует в множестве $\Omega_0 = \{x \in \Omega : b_k(x) \neq 0\}$. Учитывая это и переходя к пределу при $j \longrightarrow +\infty$ в неравенстве (23), получим

$$\|b_k D^k u - b_k D^k u_i; L_p(\Omega_\varepsilon)\| \leq C_{2,p} \|L(u - u_i); L_p(\Omega)\|.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$\|b_k D^k u - b_k D^k u_i; L_p(\Omega)\| \leq C_{2,p} \|L(u - u_i); L_p(\Omega)\|.$$

Следовательно, если переходить к пределу при $j \rightarrow +\infty$ в неравенстве

$$\sum_{|k| \leq 2r} \|b_k(x) D_x^k u_i(x); L_p(\Omega)\| \leq \mathbb{M} \|L(x, D_x) u_i(x); L_p(\Omega)\|,$$

то получим неравенство (6) для всех $u \in D(L_{(p)})$.

Ниже докажем, что в условиях теоремы найдется число $t_0 = t(r, n, p, \varkappa)$ такое, что если $0 < \tau < t_0$ и $L(x, s) \in \mathbb{B}(\tau, \vec{g}, \Omega)$, то

$$D(L_{(p)}) = \mathcal{W}_{p,L}(\Omega). \quad (25)$$

Поэтому в этом случае неравенство (6) имеет место для всех $u(x) \in L_p(\Omega)$ таких, что $L(x, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$. Таким образом, для завершения доказательства основной теоремы осталось доказать равенство (25).

Обозначим через $L'(x, s)$ символ дифференциального выражения $L'(x, D_x)$, сопряженного к дифференциальному выражению $L'(x, D_x)$. Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что если $L(x, s) \in \mathbb{B}(\tau, \vec{g}, \Omega)$, $0 < \tau < \mu$, где μ — некоторое малое число, зависящее только от r и n , то $L'(x, s) \in B(\frac{8\tau}{\mu}, \vec{g}, \Omega)$. Если же при этом выполняется неравенство (5), то

$$\sum_{|k| \leq 2r} |a'_k(x) s^k| \leq \varkappa' |L'(x, s)| \quad (x \in \Omega, s \in R_n),$$

где $\varkappa' = 4\varkappa + 3$ и $a'_k(x)$ — коэффициенты символа $L'(x, s)$.

Таким образом, к дифференциальным операторам $L = L(x, D_x)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, и $L' = L'(x, D_x)$, $D(L') = C_0^\infty(\Omega)$, можно применить результаты работы [18], согласно которым можно подобрать положительное число $t_1 = t_1(r, n, p, \varkappa)$ такое, что если $L(x, s) \in \mathbb{B}(\tau, \vec{g}, \Omega)$, то (см. [18, с. 21, 22])

$$R(L_{(p)}) = L_p(\Omega), \ker L_{(p)} = \emptyset; \quad R(L'_{(q)}) = L_q(\Omega), \ker L'_{(q)} = \emptyset, \quad 1/p + 1/q = 1.$$

Отсюда в силу [2, лемма 2.6, п. (в)] следует равенство $(L'_{(q)})^* = L_{(p)}$. Поэтому из [2, лемма 2.6, п. (г)] следует, что $u(x) \in D((L'_{(q)})^*) = D(L_{(p)})$ тогда и только тогда, когда $u(x) \in L_p(\Omega)$ и обобщенная функция

$$(L(x, D_x)u)(x) = \sum_{|k| \leq 2r} a_k(x) D_x^k u(x)$$

принадлежит пространству $L_p(\Omega)$, т. е. имеет место равенство (25).

Основная теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
2. Бойматов К. Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Тр. МИАН СССР. 1984. Т. 170. С. 37–76.
3. Anderson T. G., Hinton D. B. Relative boundedness and compactness theory for second-order differential operators // J. Inequal. Appl. 1997. V. 1. P. 375–400.
4. Binding P., Hryntiv R. Relative boundedness and relative compactness for linear operators in Banach space // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128, N 8. P. 2287–2290.

5. Отелбаев М. О разделимости эллиптических операторов // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 3. С. 540–543.
6. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости эллиптических уравнений в R^n // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 161. С. 195–217.
7. Muratbekov M., Otelbaev M. On the existence of a resolvent and separability for a class of singular hyperbolic type differential operators on an unbounded domain // Euras. Math. J. 2016. V. 7, N 1. P. 50–67.
8. Бойматов К. Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения к крайним задачам // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 3. С. 532–536.
9. Бойматов К. Х. Теоремы разделимости // Докл. АН СССР. 1973, Т. 213, № 5. С. 1009–1011.
10. Зорин А. В. Метод исследования существенного и дискретного спектра оператора Гамильтона водородоподобного атома в квантовой механике Курьшикина // Вестн. РУДН. Сер. Прикладная и компьютерная математика. 2004. Т. 3, № 1. С. 121–131.
11. Brown R. C., Hinton D. B. Relative form boundedness and compactness for a second-order differential operator // J. Comput. Appl. Math. 2004. V. 171. P. 123–140.
12. Тригуб Р. М. О сравнении линейных дифференциальных операторов // Мат. заметки. 2007. Т. 82, вып. 3. С. 426–440.
13. Behncke H., Nyamwala F. O. Spectral analysis of higher order differential operators with unbounded coefficients // Math. Nachr. 2012. V. 285, N 1. P. 56–73.
14. Brown R. C. Separation and disconjugacy // J. Inequal. Pure Appl. Math. 2003. V. 4, N 3. Art. 56. P. 1–16.
15. Ospanov K. N., Akhmetkaliyeva R. D. Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation // Electr. J. Quantat. Theory Diff. Equ. 2012. N 66. P. 1–12.
16. Zayed E. M. E., Omeran S. A. Separation for triple-harmonic differential operator in Hilbert space // Int. J. Math. Combin. 2010. V. 4. P. 13–23.
17. Qi J., Sun H. Relatively bounded and relatively compact perturbations for limit circle Hamiltonian systems // Integr. Equ. Oper. Theory. 2016. DOI 10.1007/s00020-016-2325-y.
18. Гадоев М. Г., Исмоков Ф. С. Об обратимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 3. С. 3–26.
19. Лизоркин П. И. Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p -нормах // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 156. С. 130–142.
20. Гадоев М. Г., Исмоков Ф. С. О некоторых функциональных пространствах, норма которых задается с помощью дифференциального оператора // Тр. междунар. летней математической школы-конференции С. Б. Стечкина по теории функций. Душанбе. 2016. С. 82–84.

Статья поступила 19 января 2018 г.

Гадоев Махмадрахим Гафурович,
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Политехнический институт (филиал) в г. Мирном,
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678170, Республика Саха (Якутия)
gadoev@rambler.ru

Исмоков Фаридун Сулаймонович,
Институт математики имени А. Джураева АН Республики Таджикистан,
ул. Айни, 299/4, Душанбе, 734063, Республика Таджикистан
fariduniskhokov@mail.ru

ON RELATIVE BOUNDEDNESS OF A CLASS
OF DEGENERATE DIFFERENTIAL
OPERATORS IN THE LEBESGUE SPACE
M. G. Gadoev and F. S. Iskhokov

Abstract: In the space $L_p(\Omega)$, where $1 < p < +\infty$ and Ω is an arbitrary (bounded or unbounded) domain in $\mathbb{R}_n$, we investigate relative boundedness for a class of higher order partial differential operators in non-divergent form. These operators have non-power degeneracy on the whole boundary of Ω and degeneracy with respect to each of independent variables is characterized by different functions.

In the earlier published papers in this direction, as a rule, firstly the operator is defined in Ω and then functions characterizing degeneracies of the operator's coefficients are defined in this domain.

In contrast to that, here we define Ω and these functions related to each other while fulfilling the “immersion condition” introduced by P. I. Lizorkin in [19]. In addition, differentiability of the functions by which we define degeneracy of the investigated operator is not required.

Study of relative boundedness of differential operators is one of the modern directions in such operators theory with results having a wide range of applicability to the imbedding theory of differentiable functions of many variables, the separation theory of differential operators, the spectral theory of differential operators, etc.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12764

Keywords: partial differential operator, non-power degeneracy, relative boundedness of operators, partition of the unit.

REFERENCES

1. Kato T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1995).
2. Boimatov K. Kh., “Separability theorems, weighted spaces and their applications [in Russian],” *Tr. Mat. Inst. Steklova*, **170**, 39–81 (1987).
3. Anderson T. G. and Hinton D. B., “Relative boundedness and compactness theory for second-order differential operators,” *J. Inequal. Appl.*, **1**, 375–400 (1997).
4. Binding P. and Hryntiv R., “Relative boundedness and relative compactness for linear operators in Banach space,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**, No. 8, 2287–2290 (2000).
5. Otelbaev M., “On separation of elliptic operators [in Russian],” *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **234**, No. 3, 540–543 (1977).
6. Otelbaev M., “Coercive estimates and separation theorems of elliptic operators in $\mathbb{R}^n$ [in Russian],” *Tr. Mat. Inst. Steklova*, **161**, 195–217 (1983).
7. Muratbekov M. and Otelbaev M., “On the existence of a resolvent and separability for a class of singular hyperbolic type differential operators on an unbounded domain,” *Euras. Math. J.*, **7**, No. 1, 50–67 (2016).
8. Boimatov K. Kh., “Separability theorems, weighted spaces and their applications to boundary value problems [in Russian],” *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **247**, No. 3, 532–536 (1979).

9. Boimatov K. Kh., "Separation theorems [in Russian]," Dokl. Akad. Nauk SSSR, **213**, No. 5, 1009–1011 (1973).
10. Zorin V. A., "Method of investigation of essential and discrete spectra of Hamiltonian operator of hydrogen-like atom in quantum mechanics of Kuryshkin," Vestn. Ross. Univ. Druzhby Narodov, Ser. Prikl. Comput. Mat., **3**, No. 1, 121–131 (2004).
11. Brown R. C. and Hinton D. B., "Relative form boundedness and compactness for a second-order differential operator," J. Comput. Appl. Math., **171**, 123–140 (2004).
12. Trigub R. M., "Comparison of linear differential operators," Math. Notes, **82**, No. 3, 380–394 (2007).
13. Behncke H. and Nyamwala F. O., "Spectral analysis of higher order differential operators with unbounded coefficients," Math. Nachr., **285**, No. 1, 56–73 (2012).
14. Brown R. C., "Separation and disconjugacy," J. Inequal. Pure Appl. Math., **4**, No. 3, paper 56, 1–16 (2003).
15. Ospanov K. N. and Akhmetkaliyeva R. D., "Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation," Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., **66**, 1–12 (2012).
16. Zayed E. M. E. and Omran S. A., "Separation for triple-harmonic differential operator in Hilbert space," Int. J. Math. Comb., **4**, 13–23 (2010).
17. Qi J. and Sun H., "Relatively bounded and relatively compact perturbations for limit circle Hamiltonian systems," Integr. Equ. Oper. Theory (2016). DOI 10.1007/s00020-016-2325-y.
18. Gadoev M. G. and Iskhokov F. S., "On invertibility of a class of degenerate differential operators in the Lebesgue space," Math. Zamet. SVFU, **23**, No. 3, 3–26 (2016).
19. Lizorkin P. I., "Estimate of mixed and intermediate derivatives in weighted L_p -norms [in Russian]," Tr. Mat. Inst. Steklova, **156**, 141–153 (1983).
20. Gadoev M. G. and Iskhokov F. S., "On some functional spaces, which norms are given by differential operators," in: Proc. Int. Summer Math. Stechkin School-Conf. Function Theory (Dushanbe, Tajikistan, Aug. 15–25, 2016), 82–84 (2016).

Submitted January 19, 2018

Makhmadrakhim G. Gadoev
North-Eastern Federal University,
Mirny Polytechnic Institute (branch),
5/1 Tikhonov Street, Mirny 678170, Yakutia, Russia
gadoev@rambler.ru

Faridun S. Iskhokov
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,
A. Dzhuraev Mathematical Institute,
299/4 Aini Street, Dushanbe 734063, Tajikistan
fariduniskhokov@mail.ru