

ОЦЕНКА РЕЗОЛЬВЕНТЫ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ
СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА
ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
ОПЕРАТОРОВ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Т. П. Константинова

Аннотация. Работа посвящена исследованию спектральных асимптотик эллиптических операторов произвольного четного порядка в ограниченной области со степенным вырождением вдоль всей границы. Исследуемые операторы порождаются с помощью полуторалинейных форм, которые могут не удовлетворять условию коэрцитивности. Основная часть опубликованных работ по этому направлению относится к случаю, когда коэффициенты исследуемых операторов представимы в виде произведения ограниченной функции и степени расстояния до границы. В отличие от этого здесь изучаем эллиптические операторы, младшие коэффициенты которых принадлежат некоторым L_p -пространствам со степенным весом.

Ранее во многих работах, где изучалась оценка резольвенты несамосопряженных операторов, порожденных с помощью полуторалинейных форм, доказывалось неравенство вида $\|(A - \lambda E)^{-1}\| \leq M|\lambda|^{-1/2}$. Здесь доказано одно представление резольвенты исследуемого оператора A , которое позволяет получить неравенство такого типа с показателем 1 вместо $1/2$. На основе таких неравенств можно исследовать вопросы суммируемости в смысле Абея — Лидского системы корневых вектор-функций оператора A . Также доказывается, что оператор A имеет дискретный спектр, и изучается асимптотика функции $N(t)$, указывающей число собственных значений оператора A , не превосходящих по модулю t , с учетом их алгебраических кратностей.

DOI: 10.25587/SVFU.2019.51.77.004

Ключевые слова: эллиптический оператор, ограниченная область, степенное вырождение, оценка резольвенты, асимптотика спектра.

0. Эллиптические операторы в ограниченной области со степенным вырождением вдоль всей границы хорошо исследованы в случае, когда соответствующие полуторалинейные формы удовлетворяют условию коэрцитивности (см. [1–3]). Случай, когда исследуемые операторы связаны с некоэрцитивными формами, рассматривался лишь в некоторых отдельных работах (см. [4–7]). Коэффициенты эллиптических операторов, рассмотренных в этих работах, допускались в виде произведения ограниченной функции и степени расстояния до границы области. В отличие от этого в [8] изучались эллиптические операторы, младшие коэффициенты которых принадлежат пространствам L_q с некоторым степенным весом. Аналог неравенства Гординга для операторов такого типа доказан в работах [9, 10]. Разрешимость вариационной задачи Дирихле для одного

класса вырождающихся эллиптических операторов с суммируемыми коэффициентами в случае, когда соответствующие полуторалинейные формы могут не удовлетворять условию коэрцитивности, исследовалась в работах [11, 12]. Изучаемые в настоящей работе эллиптические операторы также относятся к этому классу, и здесь доказано одно представление резольвенты и изучены спектральные свойства этих операторов. Сформулированные ниже результаты (см. п. 3) являются обобщениями некоторых результатов работ [5, 7] на случай эллиптических операторов с суммируемыми коэффициентами.

1. Пусть Ω — ограниченная область в n -мерном евклидовом пространстве R^n с замкнутой $(n-1)$ -мерной границей $\partial\Omega$, удовлетворяющей условию конуса. Пусть r — натуральное, α, p — вещественные числа и $1 \leq p < \infty$. Вводим функциональные пространства $W_{p,\alpha}^r(\Omega)$, $V_{p,\alpha}^r(\Omega)$ со следующими конечными нормами соответственно:

$$\begin{aligned} \|u; W_{p,\alpha}^r(\Omega)\| &= \left\{ \|u; L_{p,\alpha}^r(\Omega)\|^p + \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \\ \|u; V_{p,\alpha}^r(\Omega)\| &= \left\{ \|u; L_{p,\alpha}^r(\Omega)\|^p + \|u; L_{p,\alpha-r}(\Omega)\|^p \right\}^{1/p}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \|u; L_{p,\alpha}^r(\Omega)\| &= \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \rho^{p\alpha}(x) |D_x^k u(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \\ \|u; L_{p,\alpha-r}(\Omega)\| &= \left\{ \int_{\Omega} \rho^{p\alpha-pr}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \end{aligned}$$

$k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ — мультииндекс, $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ — длина мультииндекса k и

$$D_x^k = \left(\frac{\partial}{i\partial x_1} \right)^{k_1} \left(\frac{\partial}{i\partial x_2} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{\partial}{i\partial x_n} \right)^{k_n}.$$

Заметим, что (см., например, [9]) класс $C_0^\infty(\Omega)$ плотен в $V_{p,\alpha}^r(\Omega)$ и при $\alpha + 1/p \notin \{1, \dots, r\}$ с точностью до эквивалентности норм имеет место равенство

$$V_{p,\alpha}^r(\Omega) = \overset{\circ}{W}_{p,\alpha}^r(\Omega), \quad (2)$$

где $\overset{\circ}{W}_{p,\alpha}^r(\Omega)$ — пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W_{p,\alpha}^r(\Omega)$.

Далее для удобства записи обозначим пространство $\overset{\circ}{W}_{p,\alpha}^r(\Omega)$ через H_+ , а норму (1) — через $\|\cdot; H_+\|$.

Символом H_- обозначим пополнения пространства $H = L_2(\Omega)$ по норме

$$\|u; H_-\| = \sup |(u, v)|,$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в H и верхняя грань берется по всем $v \in H_+$ таким, что $\|v; H_+\| = 1$.

Элементы из H_- отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над H_+ . Действие функционала $F \in H_-$ на элемент $u \in H_+$ будем обозначать символом $\langle F, u \rangle$.

2. На функциях $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ рассмотрим интегродифференциальную полуторалинейную форму

$$B[u, v] = \sum_{|k|, |l| \leq r} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) D_x^k u(x) \overline{D_x^l v(x)} dx, \quad (3)$$

где $p_k(x) = \rho^{\alpha-r+|k|}(x)$ и $a_{kl}(x)$ — комплекснозначные функции, на которые ниже накладываются некоторые условия. Предполагается, что

I) функции $a_{kl}(x)$, $|k| = |l| = r$, непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$;

II) существуют числа $c_0 > 0$, $\varphi \in (0, \pi)$ и непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $\gamma(x) \neq 0$, $x \in \overline{\Omega}$, такие, что

$$\left| \arg \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \right| < \varphi, \quad (4)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \gamma(x) \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \right\} \geq c |\xi|^{2r} \quad (5)$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R^n \setminus \{0\}$.

III) функции $a_{kl}(x)$, $|k| + |l| \leq 2r - 1$, $|k|, |l| \leq r$, принадлежат пространству $L_{p_{kl}; -n/p_{kl}}(\Omega)$, где число p_{kl} определяется следующим образом:

- 1) $p_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{r-|k|} + \varepsilon, & |l| = r, n > 2(r - |k|), \\ \frac{n}{r-|l|} + \varepsilon, & |k| = r, n > 2(r - |l|); \end{cases}$
- 2) если $|k| \leq r - 1$, $|l| \leq r - 1$, то

$$p_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{2r-|k|-|l|} + \varepsilon, & n > 2(r - |k|), n > 2(r - |l|), \\ \frac{n}{r-|l|+\varepsilon}, & n \leq 2(r - |k|), n > 2(r - |l|), \\ \frac{n}{r-|k|+\varepsilon}, & n > 2(r - |k|), n \leq 2(r - |l|); \end{cases}$$

3) p_{kl} — любое конечное число, большее 2, в оставшихся случаях.

Здесь ε — достаточно малое положительное число, функция $\arg z$ принимает значения на отрезке $(-\pi, \pi]$ и использованы обозначения

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R^n, \quad \xi^k = \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \xi_n^{k_n}, \quad |\xi| = \{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2\}^{1/2}.$$

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B'[u, v] = \sum_{|k|, |l| \leq r} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) \gamma(x) a_{kl}(x) D_x^k u(x) \overline{D_x^l v(x)} dx. \quad (6)$$

Согласно результатам работы [9] в сделанных выше предположениях существуют постоянные $c_0 > 0$, $c_1 \geq 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} B'_0[u, u] \geq c_0 \|u; L_{2;\alpha}^r(\Omega)\|^2 - c_1 \|u; L_{2;\alpha-r}(\Omega)\|^2, \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \quad (7)$$

где $B'_0[u, u] = B'[u, v] - (\gamma\rho^{2(\alpha-r)}a_{00}u, u)$. Следовательно, если коэффициент $a_{00}(x)$ формы (3) удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \gamma(x)a_{00}(x) \geq c_2, \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

где $c_2 > c_1$ и c_1 — постоянная из (7), то

$$\operatorname{Re} B'[u, u] \geq c'_0 \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|^2 \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \quad c'_0 > 0. \quad (9)$$

Далее предположим, что условие (8) выполняется.

Форма (3) непрерывна в H_+ (см. ниже оценку (19)). Поэтому оператор $\mathcal{A}$, определенный равенством $\langle \mathcal{A}u, v \rangle = B[u, v]$, $v \in H_+$, действует из H_+ в H_- .

3. Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. Пусть выполнены все сформулированные выше условия. Пусть $\alpha < r$ и $\alpha + 1/2 \notin \{1, \dots, r\}$. Тогда существует единственный замкнутый оператор A в пространстве $L_2(\Omega)$, обладающий следующими свойствами:

- (i) $D(A) \subset L_2(\Omega)$, $(Au, v) = B[u, v]$ для всех $v \in \mathring{W}_{2,\alpha}^r(\Omega)$ и всех $u \in D(A)$,
- (ii) найдется число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ такое, что оператор $A - \lambda_0 E$ непрерывно обратим. Оператор A совпадает с сужением оператора $\mathcal{A}$ в $L_2(\Omega)$, т. е.

$$D(A) = \{u \in \mathring{W}_{2,\alpha}^r(\Omega) : \mathcal{A}u \in L_2(\Omega)\}, \quad Au = \mathcal{A}u \quad \forall u \in D(A). \quad (10)$$

Далее будем считать, что все условия теоремы 1 выполнены.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathcal{P}[u, v] = \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) D_x^k u(x) \overline{D_x^k v(x)} dx + \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx, \quad D[\mathcal{P}] = \mathring{W}_{2,\alpha}^r(\Omega). \quad (11)$$

Существует единственный самосопряженный оператор P в $L_2(\Omega)$, связанный с формой (11) равенством

$$\mathcal{P}[u, v] = ((P + E)^{1/2}u, (P + E)^{1/2}v) \quad \forall u, v \in \mathring{W}_{2,\alpha}^r(\Omega).$$

Оператор $(P + tE)^{1/2}$, $t \geq 1$, допускает продолжение до непрерывного оператора $\mathcal{P}(t) : H \rightarrow H_-$. Сужение в H оператора $\mathcal{P}^{-1}(t) : H_- \rightarrow H$ совпадает с оператором $(P + tE)^{-1/2}$.

Теорема 2. Для любого замкнутого сектора $S \subset \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| > \varphi\} \cup \{0\}$ с вершиной в нуле существует положительное число c_S такое, что при $\lambda \in S$, $|\lambda| > c_S$ справедливы представления

$$(\mathcal{A} - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda|E)^{-1/2} Y(\lambda) \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|), \quad (12)$$

$$(A - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda|E)^{-1/2} Y(\lambda) (P + |\lambda|E)^{-1/2}, \quad (13)$$

где непрерывный оператор $Y(\lambda) : H \rightarrow H$ такой, что

$$\sup_{\lambda \in S, |\lambda| > c_S} \|Y(\lambda); \mathcal{L}(H)\| < +\infty. \quad (14)$$

Здесь и далее $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих в нормированном пространстве $\mathbb{H}$. Пространство ограниченных операторов, действующих из нормированного пространства $\mathbb{H}_1$ в нормированное пространство $\mathbb{H}_2$, обозначим через $\mathcal{L}(\mathbb{H}_1; \mathbb{H}_2)$.

Следствие 1. В условиях теоремы 2 резольвента оператора A удовлетворяет оценке $\|(A - \lambda E)^{-1}; \mathcal{L}(H)\| \leq M|\lambda|^{-1}$.

Доказательство непосредственно следует из представления (13) и определения оператора P .

Теорема 3. Оператор A имеет дискретный спектр и для функции $N(t)$ распределения собственных значений оператора A справедлива оценка $N(t) \leq Mt^\omega$ ($t \geq 1$), где $\omega = \max\{\frac{n}{2r}, \frac{n-1}{2r-2\alpha}\}$.

В следующих пунктах остановимся на некоторых основных моментах доказательства сформулированных выше теорем. Приведем краткое описание этих пунктов. В п. 4 сделаны некоторые дополнительные ограничения на число φ и функцию γ , которые не нарушают общности. Некоторые известные свойства оператора P приведены в п. 5. В п. 6 доказывается ограниченность формы $B'[u, v]$ в пространстве H_+ и вводится вспомогательный оператор P_0 , связанный с этой формой. Вспомогательные операторы $B(\lambda)$, $\mathcal{B}(\lambda)$, связанные с формой

$$B'_\lambda[u, v] = B'[u, v] - \lambda(\gamma u, v) \quad (u, v \in H_+), \quad (15)$$

введены в п. 7. Здесь же доказывается, что оператор $\mathcal{B}(\lambda)$ при достаточно больших по модулю $\lambda \in S$ имеет непрерывный обратный $\mathcal{B}^{-1}(\lambda) : H_- \rightarrow H_+$. С помощью $\mathcal{B}^{-1}(\lambda)$ строится правый регуляризатор оператора $A - \lambda E$ и доказывается представление (12) и неравенство (14) теоремы 2. Доказательство теоремы 1 приведено в п. 8. Представление (13) теоремы 2 доказано в п. 9. В заключительном п. 10 доказывается теорема 3.

4. Не нарушая общности, можно предполагать $\varphi > \pi/2$ в условии (4) и $\gamma \in C^r(\overline{\Omega})$ в условии (5). В силу условия (4) неравенство (5) может выполняться также и в том случае, если

$$\gamma(x) = \exp(i\theta(x)), \quad \theta(x) = \min\{\varphi - \pi/2, |\arg \gamma(x)|\}(\text{sign } \arg \gamma(x)).$$

В этом случае имеет место неравенство

$$c|\lambda| \leq \text{Re}\{-\lambda\gamma(x)\} \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \lambda \in S, c = c_S > 0. \quad (16)$$

Здесь и далее S — любой замкнутый сектор из $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| > \varphi\} \cup \{0\}$.

5. Остановимся на некоторых свойствах оператора P . Согласно результатам работы [7] при $t \geq 1$, $|k| < |l| \leq r$ выполняется неравенство

$$\|\rho^{\alpha+|k|-r} D^l u; H\| \leq q(t) \|(P + tE)^{1/2} u; H\| \quad (17)$$

где $q(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Имеет место также неравенство

$$\|(P + tE)^{1/2} \gamma (P + tE)^{-1/2}; \mathcal{L}(H)\| \leq M \quad (t \geq 1). \quad (18)$$

Согласно результатам работ [7, 13] оператор $P = P^* \geq 0$ имеет дискретный спектр и для функции $N'(t)$ выполняется неравенство $N'(t) \leq Mt^\omega$, $1 < t < +\infty$,

где число ω такое же, как в теореме 3, $N'(t)$ — число собственных значений оператора P , не превосходящих t , с учетом их алгебраических кратностей.

6. Ниже докажем, что

$$|B'[u, v]| \leq M_1 \|u; H_+\| \|v; H_+\| \quad (u, v \in H_+), \quad (19)$$

где M_1 — положительная постоянная.

Полуторалинейную форму (6) представим в виде

$$B'[u, v] = B^*[u, v] + B_*[u, v], \quad (20)$$

где

$$B_*[u, v] = \sum_{\substack{|k|, |l| \leq r, \\ |k| + |l| \leq 2r-1}} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) \gamma(x) a_{kl}(x) D_x^k u(x) \overline{D_x^l v(x)} dx,$$

$$B^*[u, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) \gamma(x) a_{kl}(x) D_x^k u(x) \overline{D_x^l v(x)} dx.$$

В силу ограниченности коэффициентов $a_{kl}(x)$ при $|k| = |l| = r$ с помощью неравенства Коши — Буняковского доказывается, что

$$|B^*[u, v]| \leq M_2 \|u; L_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \|v; L_{2;\alpha}^r(\Omega)\|. \quad (21)$$

Форму $B_*[u, v]$ представим в виде

$$B_*[u, v] = B_*^{(1)}[u, v] + B_*^{(2)}[u, v], \quad (22)$$

где

$$B_*^{(j)}[u, v] = \sum^{(j)} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) \gamma(x) a_{kl}(x) D_x^k u(x) \overline{D_x^l v(x)} dx,$$

$\sum^{(1)}$ обозначает суммирование по мультииндексам $k, l : |k| < r, |l| \leq r$, а $\sum^{(2)}$ — по мультииндексам $k, l : |k| = r, |l| < r$.

Так же, как в работе [9], доказываются неравенства

$$|B_*^{(1)}[u, v]| \leq M_3 \|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \{ \tau \|u; L_{2;\alpha}^r(\Omega)\| + \tau^{-\mu} \|u; L_{2;\alpha-r}(\Omega)\| \}, \quad (23)$$

$$|B_*^{(2)}[u, v]| \leq M_4 \|u; L_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \{ \tau \|v; L_{2;\alpha}^r(\Omega)\| + \tau^{-\mu} \|v; L_{2;\alpha-r}(\Omega)\| \} \quad (24)$$

для любого числа $\tau > 0$. Здесь μ — некоторое положительное число.

Теперь легко можно заметить, что в силу равенств (20), (22) из (21), (23), (24) следует, что

$$|B'[u, v]| \leq M_4 \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|$$

для всех $u, v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Отсюда в силу равенства (2) следует неравенство (19).

Пусть P_0 — положительный самосопряженный оператор, ассоциированный с симметричной формой

$$P'_0[u, v] = \frac{1}{2} (B'[u, v] + \overline{B'[v, u]}), \quad D[P'_0] = H_+.$$

Тогда

$$\|(P_0 + tE)^{1/2}u; H\| = (\operatorname{Re} B'[u, u] + t(u, u))^{1/2}, \quad u \in H_+, \quad t \geq 1. \quad (25)$$

В силу неравенств (9), (19) норма (25) эквивалентна равномерно по $t \geq 1$ норме

$$\|(P + tE)^{1/2}u; H\| = \{\|u; L_{2;\alpha}^r(\Omega)\|^2 + t\|u; H\|^2\}^{1/2}. \quad (26)$$

7. В силу (9), (16), (19) при $0 \neq \lambda \in S$ для формы (15) выполняются неравенства

$$\operatorname{Re} B'_\lambda[u, u] \geq c'_0 \{\|u; L_{2;\alpha}^r(\Omega)\|^2 + |\lambda|(u, u)\}, \quad u \in H_+, \quad c'_0 > 0, \quad (27)$$

$$|B'_\lambda[u, v]| \leq M_1 \{\|u; H_+\| \|v; H_+\| + |\lambda| \|u; H\| \|v; H\|\}, \quad u, v \in H_+, \quad (28)$$

для всех $u, v \in H_+$. Следовательно, форма (15) секториальна с вершиной в нуле, т. е.

$$|\arg B'_\lambda[u, u]| \leq \psi < \frac{\pi}{2} \quad \forall u \in H_+.$$

При этом число ψ не зависит от $0 \neq \lambda \in S$. Согласно [14, гл. VI, теорема 2.1] существует такой m -секториальный оператор $B(\lambda)$, что

$$D(B(\lambda)) \subset D[B'_\lambda] \quad \text{и} \quad B'_\lambda[u, v] = (B(\lambda)u, v) \quad (u \in D(B(\lambda)), v \in D[B'_\lambda]); \quad (29)$$

если $u \in D[B'_\lambda]$, $w \in H$ и равенство $B'_\lambda[u, v] = (w, v)$ справедливо для всех v , принадлежащих ядру формы B'_λ , то $u \in D(B(\lambda))$ и $B(\lambda)u = w$.

В силу [14, гл. VI, теорема 3.2] имеет место следующее представление:

$$B^{-1}(\lambda) = (P_0 + |\lambda|E)^{-1/2} X_0(\lambda) (P_0 + |\lambda|E)^{-1/2},$$

где $\|X_0(\lambda); \mathcal{L}(H)\| \leq M$, $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq 1$.

Выше мы показали, что нормы (25), (26) эквивалентны равномерно по t . Поэтому

$$B^{-1}(\lambda) = (P + |\lambda|E)^{-1/2} X(\lambda) (P + |\lambda|E)^{-1/2}, \quad (30)$$

где $\|X(\lambda); \mathcal{L}(H)\| \leq M$, $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq 1$.

Неравенства (27), (28) позволяют применить теорему Лакса — Мильграма (см., например, [1, теорема 2.0.1; 7, утверждение 1]). В силу этой теоремы форма (15) порождает линейный непрерывный оператор $\mathcal{B}(\lambda) : H_+ \rightarrow H_-$ такой, что

$$\langle \mathcal{B}(\lambda)u, v \rangle = B'_\lambda[u, v] \quad (u, v \in H_+). \quad (31)$$

Отсюда и из (29) следует, что оператор $B(\lambda)$ совпадает с сужением в H оператора $\mathcal{B}(\lambda)$. Поэтому по непрерывности из (30) получаем представление

$$\mathcal{B}^{-1}(\lambda) = (P + |\lambda|E)^{-1/2} X(\lambda) \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|) \quad (\lambda \in S, |\lambda| \geq 1). \quad (32)$$

Оператор $\mathcal{B}(\lambda)$ действует из H_+ в H_- . Поэтому, подставляя $u = \mathcal{B}^{-1}(\lambda)f$ в равенство (31), получим

$$\begin{aligned} B'_\lambda[u, v] &= B'_\lambda[\mathcal{B}^{-1}(\lambda)f, v] \\ &= \langle \mathcal{B}(\lambda)\mathcal{B}^{-1}(\lambda)f, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall f \in H_-, \quad v \in H_+, \quad 0 \neq \lambda \in S. \end{aligned}$$

Применяя (6), (15) для $f \in H_-$, $v \in H_+$, $0 \neq \lambda \in S$, имеем

$$\langle f, v \rangle = \sum_{|k|, |l| \leq r} (\gamma p_k a_{kl} D^k \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f, p_l D^l v) - \lambda (\gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f, v). \quad (33)$$

В п. 2 мы ввели оператор $\mathcal{A} : H_+ \rightarrow H_-$, который действует по формуле $\langle \mathcal{A}u, v \rangle = B[u, v]$, $v \in H_+$. Имеем

$$\langle (\mathcal{A} - \lambda E)u, v \rangle = B[u, v] - \lambda(u, v).$$

Отсюда при $u = \gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f$ следует, что

$$\langle (\mathcal{A} - \lambda E) \gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f, v \rangle = \sum_{|k|, |l| \leq r} (p_k a_{kl} D^k \gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f, p_l D^l v) - \lambda (\gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f, v).$$

Вычитая соответствующие части равенства (33), находим

$$\begin{aligned} & \langle (\mathcal{A} - \lambda E) \gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f, v \rangle - \langle f, v \rangle \\ &= \sum_{|k|, |l| \leq r} \left(p_k a_{kl} \sum' C_{k, k'} (D^{k'} \gamma) D^{k-k'} \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f, p_l D^l v \right) \end{aligned} \quad (34)$$

для всех $f \in H_-$, $v \in H_+$, $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq 1$. Здесь $C_{k, k'}$ — некоторые константы и символом $\sum'$ обозначено суммирование по всем мультииндексам k, l, k' таким, что $|k|, |l| \leq r$, $|k'| \neq 0$.

Используя представление (32) и неравенство (17), имеем

$$\begin{aligned} \|p_k D^{k-k'} \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f; H\| &\leq q(\lambda) \|(P + |\lambda|E)^{1/2} \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f; H\| \\ &\leq c_1 q(\lambda) \|\mathcal{P}^{-1}(|\lambda|) f; H\|, \quad f \in H_-, \end{aligned} \quad (35)$$

для всех $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq 1$, $|k| \leq r$, $|k'| \neq 0$; положительная функция $q(t)$, $t \geq 1$, такова, что $q(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Для дальнейшего хода доказательства удобно ввести пространство H_ν , $\nu \geq 1$, с нормой

$$\|u; H_\nu\| = \left\{ \|u; L_{2; \alpha}^r(\Omega)\|^2 + \nu \|u; H\|^2 \right\}^{1/2}. \quad (36)$$

Не вводя новое обозначение, далее будем считать, что H_ν — замыкание класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (36). Обозначим через $H_{-\nu}$, $\nu \geq 1$, пополнение пространства H по норме

$$\|f; H_{-\nu}\| = \sup |(f, w)|,$$

где верхняя грань берется по всем $w \in H_+$ таким, что $\|w; H_\nu\| = 1$. Заметим, что при $\nu_1, \nu_2 \geq 1$ множества $H_{\pm \nu_1}$, $H_{\pm \nu_2}$ совпадают, а как нормированные пространства отличаются друг от друга только эквивалентными нормами, и при $\nu = 1$ имеем $H_\nu = H_+$, $H_{-\nu} = H_-$.

Так как $\mathcal{P}(|\lambda|)$ — продолжение оператора $(P + |\lambda|E)^{1/2}$ по непрерывности, из равенств (26), (36) следует, что

$$\|\mathcal{P}^{-1}(|\lambda|) f; H\| \leq c_2 \|f; H_{-|\lambda|}\|, \quad f \in H_-, \quad |\lambda| \geq 1.$$

Учитывая это, из (35) имеем

$$\|p_k D^{k-k'} \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f; H\| \leq c_3 q(\lambda) \|f; H_{-|\lambda|}\|, \quad f \in H_-,$$

для всех $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq 1$, $|k| \leq r$, $|k'| \neq 0$. Используя это неравенство, легко доказать, что правая часть (34) по модулю не превосходит $c_4 q(|\lambda|) \|f; H_{-\nu}\| \cdot \|v; H_\nu\|$ для всех $1 \leq \nu \leq 4|\lambda|$, $\lambda \in S$ и всех $f \in H_-$, $v \in H_+$. Поэтому оператор $G'(\nu, \lambda)$, $1 \leq \nu \leq 4|\lambda|$, определенный равенством

$$G'(\nu, \lambda) = E - (\mathcal{A} - \lambda E) \gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda),$$

действует из $H_{-\nu}$ в $H_{-\nu}$ и для достаточно больших по модулю $\lambda \in S$ его норма меньше единицы.

Проводя аналогичные рассуждения для оператора $\mathcal{A}^+ - \bar{\lambda} E$, где оператор $\mathcal{A}^+$ определяется равенствами

$$\langle \mathcal{A}^+ u, v \rangle = \overline{B[v, u]} = \sum_{|k|, |l| \leq r} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) \overline{a_{lk}(x)} D_x^k u(x) \overline{D_x^l v(x)} dx, \quad u, v \in H_+,$$

получаем $\ker(\mathcal{A} - \lambda E) = 0$, $\lambda \in S$, $|\lambda| > c'_S$. Таким образом, для достаточно больших по модулю $\lambda \in S$ оператор $\mathcal{A} - \lambda E$ непрерывно обратим и при $1 \leq \nu \leq 4|\lambda|$ справедливо представление

$$(\mathcal{A} - \lambda E)^{-1} = \gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda) (E + \mathcal{G}(\nu, \lambda)), \quad (37)$$

где непрерывный оператор $\mathcal{G}(\nu, \lambda) : H_{-\nu} \rightarrow H_{-\nu}$ задается следующим образом:

$$E + \mathcal{G}(\nu, \lambda) = (E + \mathcal{G}'(\nu, \lambda))^{-1} = E + \mathcal{G}'(\nu, \lambda) + (\mathcal{G}'(\nu, \lambda))^2 + \dots$$

Используя (18), (32), (37), имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - \lambda E)^{-1} &= \gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda) (E + \mathcal{G}(\nu, \lambda)) \\ &= (P + |\lambda| E)^{-1/2} X(\lambda) \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|) (E + \mathcal{G}(\nu, \lambda)) \\ &= (P + |\lambda| E)^{-1/2} X_1(\lambda) \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|) (E + \mathcal{G}(\nu, \lambda)) \mathcal{P}(|\lambda|) \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|), \end{aligned} \quad (38)$$

где оператор $X_1(\lambda) : H \rightarrow H$ такой, что

$$\|X_1(\lambda); \mathcal{L}(H)\| \leq M \quad (\lambda \in S, |\lambda| > c'_S).$$

Вводя обозначение

$$Y(\lambda) = X_1(\lambda) \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|) (E + \mathcal{G}(\nu, \lambda)) \mathcal{P}(|\lambda|), \quad (39)$$

из (38) получим представление (12) теоремы 2.

Докажем неравенство (14) теоремы 2. При $\lambda \in S$, $|\lambda| > c'_S$, $\nu = |\lambda|$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}^{-1}(|\lambda|) \mathcal{G}(\nu, \lambda) \mathcal{P}(|\lambda|) u; H\| &\leq M_1 \|\mathcal{G}(\nu, \lambda) \mathcal{P}(|\lambda|) u; H_{-|\lambda|}\| \\ &\leq M_2 \|\mathcal{P}(|\lambda|) u; H_{-|\lambda|}\| \leq M_3 \|u; H\|, \quad u \in H. \end{aligned}$$

Отсюда и из (39) следует (14).

8. Переходим к доказательству теоремы 1. Пусть A — сужение оператора $\mathcal{A}$ в H (см. (10)). Из определения оператора $\mathcal{A}$ следует, что $(Au, v) = B[u, v]$ для всех $v \in H_+$ и всех $u \in D(A) \subset H$, т. е. имеет место утверждение п. (i) теоремы 1.

Равенство (37) означает, что при $\lambda \in S$, $|\lambda| > c_S$ оператор $A - \lambda E$ имеет нулевое ядро и в силу (10), (12) имеет место равенство

$$(A - \lambda E)^{-1}u = (\mathcal{A} - \lambda E)^{-1}u \quad (\lambda \in S, |\lambda| > c_S) \quad (40)$$

для всех $u \in H$.

Далее докажем единственность оператора A с приведенными выше свойствами. Пусть A' — некоторый замкнутый оператор в H такой, что

$$D(A') \subset H_+, \quad (A'u, v) = B[u, v]$$

для всех $v \in H_+$, $u \in D(A')$. Так как A — сужение оператора $\mathcal{A}$, ясно, что $D(A') \subset \{u \in H_+ : \mathcal{A}u \in H\} = D(A)$ и оператор A является расширением оператора A' . Из определения оператора A при некотором $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ существует непрерывный оператор $(A' - \lambda_0 E)^{-1}$. Поэтому

$$(A - \lambda_0 E)(A' - \lambda_0 E)^{-1}u = u \quad \forall u \in H. \quad (41)$$

Так как $D(A') \subset H_+$ и вложение H_+ в H компактно, оператор A' имеет дискретный спектр. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что число λ_0 в равенстве (41) такое, что $\lambda_0 \in S$, $|\lambda_0| > c_S$. Следовательно, $(A' - \lambda_0 E)^{-1} = (A - \lambda E)^{-1}$ и $A' = A$. Единственность оператора A доказана, что завершает доказательство теоремы 1.

9. Напомним, что представление (12) и неравенство (14) теоремы 2 доказаны в п. 7. Для завершения доказательства этой теоремы заметим, что в силу равенства (40) из (12) следует представление (13).

10. Переходим к доказательству теоремы 3. Так как (см. п. 5)

$$N'(t) \leq Mt^\omega, \quad 1 < t < +\infty, \quad \omega = \max \left\{ \frac{n}{2r}, \frac{n-1}{2r-2\alpha} \right\},$$

порядок резольвенты оператора P не превосходит числа ω . Отсюда и из представления (13) следует, что порядок резольвенты оператора A также не превосходит ω .

Пусть целое число m такое, что $m > \omega$. Возведем обе части равенства (13) в степень m :

$$(A - \lambda E)^{-m} = ((P + |\lambda|E)^{-1/2})^m Y^m(\lambda) ((P + |\lambda|E)^{-1/2})^m.$$

Учитывая ограниченность оператора $Y(\lambda)$, для достаточно больших $t \geq t_0$ имеем

$$\|(A + tE)^{-m}\|_1 \leq M \|(P + tE)^{-1/2}\|_{2m}^{2m} \leq M \int_0^{+\infty} \frac{dN'(\tau)}{(t + \tau)^m}. \quad (42)$$

Здесь $\|\cdot\|_1$ — ядерная норма оператора и $\|\cdot\|_{2m}$ — σ_{2m} -норма оператора (см. [15]). Из теоремы 2 следует, что собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ оператора A лежат в секторе $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \varphi\}$. Поэтому существуют положительные числа c_0, τ_0 такие, что

$$c_0(\tau + |\lambda_j|) \leq |\tau + \lambda_j|, \quad j = 1, 2, \dots, \tau > \tau_0.$$

Сумма модулей собственных значений ядерного оператора не превосходит его ядерной нормы. В силу этого из (42) получим

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |(t + |\lambda_j|)|^{-m} \leq M \int_0^{+\infty} \frac{dN'(\tau)}{(t + \tau)^m} \leq M_1 \int_0^{+\infty} \frac{d(\tau^\omega)}{(t + \tau)^m}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} N(t) &= \int_0^t dN(\tau) \leq 2^m t^m \int_0^t \frac{dN(\tau)}{(\tau + t)^m} \\ &\leq M_2 t^m \sum_{j=1}^{+\infty} |(t + |\lambda_j|)|^{-m} \leq M_3 t^m \int_0^{+\infty} \frac{d(\tau^\omega)}{(t + \tau)^m} \leq M_4 t^\omega \quad (t \geq 2). \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Лирозкин П. И., Мирошин Н. В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений // Изв. вузов. Математика. 1988. № 8. С. 4–30.
2. Мирошин Н. В. Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1992. Т. 194. С. 179–195.
3. Исмоков С. А. О гладкости решения вырождающихся эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 4. С. 641–653.
4. Бойматов К. Х. Матричные дифференциальные операторы, порожденные некоэрцитивными формами // Докл. АН. 1994. Т. 339, № 1. С. 5–10.
5. Бойматов К. Х. Некоторые спектральные свойства матричных дифференциальных операторов, далеких от самосопряженных // Функцион. анализ и его прил. 1995. Т. 29, № 3. С. 55–58.
6. Бойматов К. Х., Исмоков С. А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1997. Т. 214. С. 107–134.
7. Бойматов К. Х. О базисности по Абелю системы корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 46–57.
8. Исмоков С. А., Куджмуродов А. Я. О вариационной задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов // Докл. АН. 2005. Т. 403, № 2. С. 165–168.
9. Исмоков С. А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 2. С. 201–216.
10. Исмоков С. А., Гадоев М. Г., Якушев И. А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением и его приложения // Уфим. мат. журн. 2016. Т. 8, № 1. С. 54–71.
11. Гадоев М. Г., Константинова Т. П. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических операторов // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 2. С. 8–21.

12. Исхоков С. А., Гадоев М. Г., Константинова Т. П. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами // Докл. АН. 2015. Т. 462, № 1. С. 7–10.
13. Бойматов К. Х. Двусторонние оценки собственных значений задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 172. С. 16–28.
14. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
15. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 24 июня 2019 г.

После доработки 11 октября 2019 г.

Принята к публикации 27 ноября 2019 г.

Константинова Туйаара Петровна,
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Политехнический институт (филиал) в г. Мирном,
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678170, Республика Саха (Якутия)
konct-tua@mail.ru

RESOLVENT ESTIMATES AND SPECTRAL
PROPERTIES OF A CLASS OF DEGENERATE
ELLIPTIC OPERATORS IN A BOUNDED DOMAIN

T. P. Konstantinova

Abstract: The paper is devoted to the study of the spectral asymptotics of elliptic operators of arbitrary even order in a bounded domain with power degeneration along the entire boundary. The operators under study are generated by sesquilinear forms that may not satisfy the coercivity condition. The main part of the published papers in this area refers to the case when the coefficients of the studied operators can be represented as a product of a bounded function and the degree of distance to the boundary. In contrast, here we study elliptic operators whose lower coefficients belong to certain L_p -spaces with power weights.

Earlier, in many papers, where the estimation of the resolvent of non-self-adjoint operators generated by sesquilinear forms was studied, the inequality of the form $\|(A - \lambda E)^{-1}\| \leq M|\lambda|^{-1/2}$ was proved. Here we prove one representation of the resolvent of the operator A that allows us to obtain an inequality of this type with 1 instead of $1/2$. On the basis of such inequalities, we can investigate the summability in the Abel–Lidskiy sense of the system of root vector functions of the operator A . It is also proved that the operator A has a discrete spectrum, and the asymptotics of the function $N(t)$, the number of eigenvalues of the operator A whose magnitude is at most t , taking into account their algebraic multiplicities, is studied.

DOI: 10.25587/SVFU.2019.51.77.004

Keywords: elliptic operator, bounded domain, power degeneracy, resolvent estimate, asymptotic behavior of spectrum, noncoercive form.

REFERENCES

1. Nikolskii S. M., Lizorkin P. I., and Miroshin N. V., “Weighted functional spaces and their application to investigation of boundary value problems for degenerate elliptic equations,” *Sov. Math.*, **32**, No. 8, 1–40 (1988).
2. Miroshin N. V., “The exterior variational Dirichlet problem for an elliptic operator with degeneration,” *Proc. Steklov Inst. Math.*, No. 4, 187–205 (1993).
3. Iskhokov S. A., “Smoothness of the generalized solution of an elliptic equation with nonpower degeneracy,” *Differ. Equ.*, **39**, No. 11, 1618–1625 (2003).
4. Boimatov K. Kh., “Matrix differential operators generated by noncoercive bilinear forms,” *Russ. Acad. Sci., Dokl., Math.*, **50**, No. 3, 351–359 (1995).
5. Boimatov K. Kh., “Some spectral properties of matrix differential operators that are far from selfadjoint [in Russian],” *Funkts. Anal. Prilozh.*, **29**, No. 3, 55–58 (1995).
6. Boimatov K. Kh. and Iskhokov S. A., “On the solvability and smoothness of a solution to the variational Dirichlet problem related with a noncoercive bilinear form,” *Proc. Steklov Inst. Math.*, **214**, 101–127 (1996).
7. Boimatov K. Kh., “On the Abel basis property of the system of root vector-functions of degenerate elliptic differential operators with singular matrix coefficients,” *Sib. Math. J.*, **47**, No. 1, 35–44 (2006).

8. Iskhokov S. A. and Kuzhmuratov A. Ya., "On the variational Dirichlet problem for degenerate elliptic operators," Dokl. Math., **72**, No. 1, 512–515 (2005).
9. Iskhokov S. A., "Garding's inequality for elliptic operators with degeneracy," Math. Notes, **87**, No. 2, 189–203 (2010).
10. Iskhokov S. A., Gadoev M. G., and Yakushev I. A., "Garding inequality for higher order elliptic operators with a non-power degeneration and its applications [in Russian]," Ufim. Mat. Zh., **8**, No. 1, 54–71 (2016).
11. Gadoev M. G. and Konstantinova T. P., "On solvability of the variational Dirichlet problem for a class of degenerate elliptic operators [in Russian]," Mat. Zametki SVFU, **21**, No. 2, 8–21 (2013).
12. Iskhokov S. A., Gadoev M. G., and Konstantinova T. P., "Variational Dirichlet problem for degenerate elliptic operators generated by noncoercive forms," Dokl. Math., **91**, No. 3, 255–258 (2015).
13. Boimatov K. Kh., "Two-sided estimates of eigenvalues of the Dirichlet problem for a class of degenerated elliptic differential operators [in Russian]," Tr. Mat. Inst. Steklova, **172**, 16–28 (1985).
14. Kato T., Perturbation Theory of Linear Operators, Springer-Verl., Berlin; Heidelberg (1967).
15. Gokhberg I. Ts. and Krein M. G., Introduction to the Theory of Non-Self-Adjoint Linear Operators [in Russian], Nauka, Moscow (1965).

Submitted June 24, 2019

Revised October 11, 2019

Accepted November 27, 2019

Tuyaara P. Konstantinova
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Mirny Polytechnic Institute,
5/1 Tikhonov Street, 678170 Mirny, Russia
`konct-tua@mail.ru`