

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ТЕЛА С МАЛЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Н. В. Неустроева,
Н. М. Афанасьева, А. А. Егорова

Аннотация. Рассматривается нелинейная задача о равновесии упругого тела с периодически расположенными трещинами. При этом на краях трещин ставятся односторонние ограничения, что приводит к вариационному неравенству. Период распределения трещин, а также их размеры зависят от малого параметра. Поведение решения задачи с периодически расположенными трещинами определяется двумя первыми членами $\mathbf{u}^0(x)$, $\mathbf{u}^1(x, y)$ асимптотического разложения. В статье изучается решение вариационного неравенства на ячейке периодичности (локальная задача). Для первого корректора $\mathbf{u}^1(x, y)$ строится уравнение со штрафом и линейное итерационное уравнение в интегральной форме. Доказано, что последовательность решений задачи со штрафом при стремлении малого параметра регуляризации к нулю сходится к решению задачи на ячейке. Показано, что приближенное решение итерационного уравнения сходится сильно к решению уравнения со штрафом.

DOI: 10.25587/SVFU.2019.102.31509

Ключевые слова: упругое тело, трещина, усреднение, метод штрафа.

Введение

Статья посвящена изучению краевой задачи о равновесии упругого тела с периодически расположенными трещинами. При этом на берегах трещин заданы условия, не позволяющие противоположным берегам проникать друг в друга (одностороннего ограничения). Период распределения трещин, а также размеры их зависят от малого параметра $\varepsilon \ll 1$. Задача ставится в виде вариационного неравенства на некотором выпуклом замкнутом множестве допустимых перемещений. В [1, гл. VI, § 6] изучено поведение решения $\mathbf{u}^\varepsilon$ данной краевой задачи, для исследования применен стандартный метод асимптотических разложений. Показано, каким краевым задачам должны удовлетворять два первых члена $\mathbf{u}^0(x)$ и $\mathbf{u}^1(x, y)$ формального асимптотического разложения для решения $\mathbf{u}^\varepsilon$. В [2] частично обосновано усреднение, а именно, доказана сходимость решения $\mathbf{u}^\varepsilon$ к $\mathbf{u}^0(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в L^2 -норме. При этом $\mathbf{u}^0(x)$ является решением краевой задачи теории упругости в области без трещин, а первый

Работа выполнена при поддержке Мегагранта Правительства Российской Федерации 14.Y26.31.0013.

© 2019 Неустроева Н. В., Афанасьева Н. М., Егорова А. А.

корректор $\mathbf{u}^1(x, y)$ — решением вариационного неравенства на ячейке периодичности с одной трещиной при заданной функции $\mathbf{u}^0(x)$.

В [3, 4] представлены самые разные модели задач о равновесии упругих и неупругих тел с односторонними ограничениями. Работ по численному решению задач теории трещин с условиями взаимного непроникания берегов не так много. С численными решениями вариационных задач с нелинейными краевыми условиями можно ознакомиться, например, в [5, 6]. В работах [3, пп. 2.6.1, 3.6.3; 7–9] рассматривается итерационный метод решения вариационных неравенств. В них исследованы модельные задачи о равновесии упругой пластины с одной трещиной.

В настоящей работе рассматривается нелинейная задача о равновесии упругого тела с периодически расположенными трещинами. Построены приближенные уравнения для решения $\mathbf{u}^1(x, y)$ с использованием штрафного и итерационного методов [3, п. 1.3; 10, гл. 3, § 5]. Доказаны результаты о сходимости решений. Полученные результаты позволяют исследовать численные методы решения данной задачи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с липшицевой границей $\partial\Omega$. Пусть $Y = (0, 1)^2$ — единичный квадрат в $\mathbb{R}^2$. В Y имеется гладкая трещина Γ , непересекающая границу квадрата Y . Пусть Y_Γ — открытая область $Y \setminus \Gamma$, Γ_0 — неограниченное множество с 1-периодической структурой: $\Gamma_0 \cap Y = \Gamma$; $\Gamma_{\varepsilon 0} = \varepsilon \Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{\varepsilon} \in \Gamma_0\}$. Если $T_\varepsilon = \{z \in Z^2 : \varepsilon(\bar{Y} + z) \subset \Omega\}$, то множество

$$\Gamma_\varepsilon = \bigcup_{z \in T_\varepsilon} \varepsilon(\Gamma + z)$$

— некоторая часть $\Gamma_{\varepsilon 0}$, попавшая в область Ω , притом не выходящая на границу $\partial\Omega$. Множество Γ_ε будем рассматривать как систему периодически (с периодом εY) расположенных трещин. Через Ω_ε обозначим область с трещинами, т. е.

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \{x : x/\varepsilon \in Y_\Gamma\}.$$

Пусть $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \Gamma_\varepsilon$. Граница области Ω_ε состоит из внешней границы $\partial\Omega$ и внутренней Γ_ε с двумя берегами Γ_ε^+ , Γ_ε^- . Предположим, что $\partial\Omega$ не пересекается с системой трещин Γ_ε (рис 1). Выберем вектор единичной нормали $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ на Γ_ε .

Рассмотрим область с трещиной Y_Γ с границей ∂Y . Предположим, что ∂Y класса $\tilde{C}^{0,1}$, т. е. с помощью замкнутого продолжения трещины Σ область Y может быть разделена на две подобласти Y_1 и Y_2 с границами класса $C^{0,1}$, которые состоят из границ ∂Y , Σ^+ и Σ^- . Введем обозначение $[v]$ для скачка $v|_{\Sigma^+} - v|_{\Sigma^-}$.

Уравнение состояния имеет вид

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}),$$

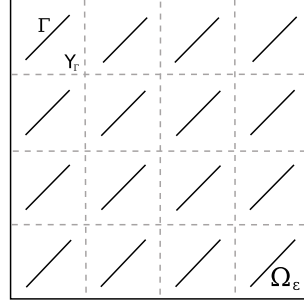


Рис. 1. Область с периодически расположенными трещинами

где e_{kl} — тензор малых деформаций,

$$e_{kl}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right),$$

σ_{ij} — тензор напряжений, $i, j, k, l = 1, 2$; a_{ijkl} — тензор модулей упругости, обладающий свойствами симметрии и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij},$$

$$a_{ijkl} \xi_{kl} \xi_{ij} \geq C_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad C_0 = \text{const} > 0, \quad i, j, k, l = 1, 2.$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование. Для производной используем обозначение $\frac{\partial v}{\partial x_i} = v_{,i}$.

Определим множество допустимых перемещений

$$K_\varepsilon = \{ \mathbf{v} \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\varepsilon) \mid [\mathbf{v}_\nu] \geq 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon \},$$

где

$$H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\varepsilon) = \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H^1(\Omega_\varepsilon) \mid \mathbf{v} = 0 \text{ на } \partial\Omega \}.$$

Существует единственное решение $\mathbf{u}^\varepsilon$ задачи минимизации функционала на заданном множестве K_ε

$$\inf_{\mathbf{v} \in K_\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}(\mathbf{v}) e_{ij}(\mathbf{v}) - \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{f} \mathbf{v} \right\}.$$

Решение $\mathbf{u}^\varepsilon$ удовлетворяет вариационному неравенству

$$\mathbf{u}^\varepsilon \in K_\varepsilon, \quad \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) e_{ij}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^\varepsilon) \geq \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{f}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^\varepsilon) \quad \forall \mathbf{v} \in K_\varepsilon. \quad (1)$$

Приведем дифференциальную формулировку задачи (1). Требуется найти $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$ и $\sigma_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon)$, $i, j = 1, 2$, такие, что

$$-\sigma_{ij,j} = \mathbf{f}, \quad i, j = 1, 2 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (3)$$

$$[\mathbf{u}_\nu^\varepsilon] \geq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\nu \cdot [\mathbf{u}^\varepsilon] \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon, \quad (4)$$

$$\sigma_\nu \leq 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon^\pm, \quad (5)$$

где $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)$ — заданные внешние силы, σ_ν , $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ — нормальная и касательная составляющие на границе соответственно, $\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i$, $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \cdot \boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\sigma}_\tau = (\sigma_{\tau 1}, \sigma_{\tau 2})$, $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j)$. С результатами по исследованию моделей вида (2)–(5) можно ознакомиться в работах [1, 2, 4] и др.

В [1, гл. VI, § 6] рассмотрено асимптотическое поведение $\mathbf{u}^\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $\mathbf{u}^\varepsilon$ — решение неравенства (1). Решение $\mathbf{u}^\varepsilon$ ищется в виде разложения

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}^0(x) + \varepsilon \mathbf{u}^1(x, y) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(x, y) + \dots, \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

пробные функции $\mathbf{v}^\varepsilon$ берутся в виде

$$\mathbf{v}^\varepsilon = \mathbf{v}^0(x) + \varepsilon \mathbf{v}^1(x, y) + \varepsilon^2 \mathbf{v}^2(x, y) + \dots, \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad x \in \Omega. \quad (7)$$

В (6) и (7) $\mathbf{u}^i(x, y)$, $\mathbf{v}^i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots$, — функции, определенные на $\Omega \times Y_\Gamma$, 1-периодические по y . Так как $\mathbf{u}^0(x)$, $\mathbf{v}^0(x)$ не зависят от y , условие $\mathbf{u}^\varepsilon \in K_\varepsilon$ означает, что $[\mathbf{u}_\nu^1] \geq 0$ на Γ_ε .

Введем пространства

$$H_{Y\Gamma} = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2) : v_i \in H^1(Y_\Gamma), \quad v_i \text{ 1-периодические по } y, \quad i = 1, 2\},$$

$$\tilde{H}_{Y\Gamma} = \{\mathbf{v} \in H_{Y\Gamma} : \bar{\mathbf{v}} = 0\}, \quad \text{где } \bar{\mathbf{v}} = \int_Y \mathbf{v} dy,$$

и множества функций на ячейке Y_Γ :

$$K_{Y\Gamma} = \{\mathbf{v} \in H_{Y\Gamma} : [\mathbf{v}_\nu^1] \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma\},$$

$$\tilde{K}_{Y\Gamma} = \{\mathbf{v} \in K_{Y\Gamma} : \bar{\mathbf{v}} = 0\}.$$

Следовательно, считаем, что в разложении (6), (7) $\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0 \in (H_0^1(\Omega))^2$, а $\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1 \in K_{Y\Gamma}$.

В [1, гл. VI, § 6] показано, что, исследуя неравенство (1) для функций $\mathbf{u}^\varepsilon$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}^\varepsilon$ вида (6) и (7), можно вывести задачи для функций $\mathbf{u}^0$, $\mathbf{u}^1$ из разложения (6). Функция $\mathbf{u}^0$ принадлежит пространству $(H_0^1(\Omega))^2$ и удовлетворяет вариационному равенству

$$\int_\Omega \int_Y a_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i^0 - u_i^0) dx dy - \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{v}^0 - \mathbf{u}^0) dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2.$$

Вариационное равенство эквивалентно следующей краевой задаче. Требуется найти функцию $\mathbf{u}^0 \in (H_0^1(\Omega))^2$ такую, что

$$-\bar{\sigma}_{ij,j}(\mathbf{u}^0) = \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega, \quad (8)$$

где

$$\bar{\sigma}_{ij} = \int_Y \sigma_{ij}(\mathbf{u}^0) dy, \quad \sigma_{ij}(\mathbf{u}^0) = a_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right), \quad i, j = 1, 2;$$

$$\mathbf{u}^0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Теперь рассмотрим локальную задачу в Y . Функция $\mathbf{u}^1(x, y)$ принадлежит $K_{Y\Gamma}$. Выберем $\mathbf{v}^1(x, y)$ в виде

$$\mathbf{v}^1(x, y) = \mathbf{u}^1(x, y) + \theta[\mathbf{w}(y) - \mathbf{u}^1(x, y)] \equiv (1 - \theta)\mathbf{u}^1(x, y) + \theta\mathbf{w}(y);$$

$$\theta \in D(\Omega), \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad \mathbf{w}(y) \in K_{Y\Gamma}.$$

При фиксированных x , $\mathbf{u}^0$ функция $\mathbf{u}^1(x, y) \in K_{Y\Gamma}$ удовлетворяет вариационному неравенству

$$\int_Y a_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} (w_i - u_i^1) dy \geq 0 \quad \forall w_i \in K_{Y\Gamma}. \quad (9)$$

Запишем (9) в явном виде. Заметим, что функции $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{w}$ входят в неравенства (9) через свой градиент по переменной y , поэтому к каждой из них допустимо добавить постоянную величину, отчего левая часть не изменится. Тогда естественно использовать $\tilde{H}_{Y\Gamma}$ и $\tilde{K}_{Y\Gamma}$ вместо $H_{Y\Gamma}$, $K_{Y\Gamma}$.

Сформулируем локальную задачу. Пусть $\mathbf{u}^0(x)$ — заданная функция. Требуется найти функцию $\mathbf{u}^1(x, y) \in \tilde{K}_{Y\Gamma}$ такую, что

$$\int_Y a_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} (w_i - u_i^1) dy \geq 0 \quad \forall w_i \in \tilde{K}_{Y\Gamma}. \quad (10)$$

Введем следующие обозначения:

$$a_Y(\mathbf{v}^1, \mathbf{w}) = \int_Y a_{ijkl} \frac{\partial v_k^1}{\partial y_l} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dy \text{ — билинейная форма,}$$

$$L(\mathbf{w}) = \int_Y a_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} dy \text{ — линейная форма.}$$

Вариационное неравенство (10) перепишем в следующем виде. Найти функцию $\mathbf{u}^1(x, y) \in \tilde{K}_{Y\Gamma}$, для которой неравенство

$$a_Y(\mathbf{u}^1, \mathbf{w} - \mathbf{u}^1) + L(\mathbf{w} - \mathbf{u}^1) \geq 0 \quad (11)$$

выполняется для любой функции $\mathbf{w} \in \tilde{K}_{Y\Gamma}$. Локальная задача (11) имеет единственное решение на множестве $\tilde{K}_{Y\Gamma}$ [1, гл. VI, § 6, теорема 6.1].

Сходимость решения $\mathbf{u}^\varepsilon$ вариационного неравенства (1) к решению $\mathbf{u}^0$ усредненной задачи (8) доказывается в [2, § 2, теорема 4]. Отметим, что полное обоснование сходимости можно сделать по методу периодического разворачивания. Основы метода можно увидеть в работе [11], а его приложения — в [12–14].

2. Метод штрафа для задачи на ячейке

Обозначим через $H(Y)$ пространство $(\tilde{H}_{Y\Gamma})^2$ с нормой

$$\|v\|_{H(Y)}^2 = \|v\|_{L^2(Y_\Gamma)}^2 + \sum_{i=1}^2 \|v_{,i}\|_{L^2(Y_\Gamma)}^2.$$

В дальнейшем будем использовать обозначение $\|\cdot\|$ для нормы $\|v\|_{H(Y)}$.

Для локальной задачи определим оператор штрафа $\beta(\mathbf{u}^1) : H(Y) \rightarrow H(Y)^*$,

$$\langle \beta(\mathbf{u}^1), \mathbf{v} \rangle = - \int_{\Gamma} [\mathbf{u}_\nu^1]_- [\mathbf{v}_\nu],$$

где угловые скобки обозначают двойственность между пространствами $H(Y)$ и $H(Y)^*$, нижний знак минус — отрицательную часть функции, т. е.

$$[\mathbf{u}_\nu^1]_- = \begin{cases} 0, & \text{если } [\mathbf{u}_\nu^1] \geq 0; \\ -[\mathbf{u}_\nu^1], & \text{если } [\mathbf{u}_\nu^1] < 0. \end{cases}$$

Оператор штрафа $\beta(\mathbf{u}^1)$ является монотонным ограниченным семинепрерывным оператором. Монотонность $\beta(\mathbf{u}^1)$ следует из справедливости следующего неравенства:

$$\langle \beta(\mathbf{u}^1) - \beta(\mathbf{v}), \mathbf{u}^1 - \mathbf{v} \rangle = - \int_{\Gamma} ([\mathbf{u}_\nu^1]_- - [\mathbf{v}_\nu]_-) [(\mathbf{u}^1 - \mathbf{v})_\nu] \geq 0 \quad \forall \mathbf{u}^1, \mathbf{v} \in H(Y),$$

которое можно доказать, подставляя различные случаи знаков скачков для $\mathbf{u}^1$ и $\mathbf{v}$.

Ограниченность $\beta(\mathbf{u}^1)$ следует из непрерывности операторов следа.

Рассмотрим семинепрерывность оператора $\beta(\mathbf{u}^1)$. Для любых $\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^1, \mathbf{v} \in (H^1(Y_\Gamma))^3$ покажем, что функция $\rho : \lambda \rightarrow \langle \beta(\mathbf{u}_1^1 + \lambda \mathbf{u}_2^1), \mathbf{v} \rangle$ непрерывна как функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Для произвольных функций s и g имеем неравенство

$$\left| \frac{|s| - s}{2} - \frac{|s+g| - (s+g)}{2} \right| \leq |g|.$$

Отсюда получаем оценку

$$|\langle \beta(\mathbf{u}_1 + \lambda_0 \mathbf{u}_2), \mathbf{v} \rangle - \langle \beta(\mathbf{u}_1 + \lambda \mathbf{u}_2), \mathbf{v} \rangle| \leq |\lambda - \lambda_0| \int_{\Gamma} |[\mathbf{u}_{2\nu}]_-| |[\mathbf{v}_\nu]|.$$

Из данного неравенства следует непрерывность функции ρ , что, в свою очередь, означает семинепрерывность оператора $\beta(\mathbf{u}^1)$.

Рассмотрим нелинейное уравнение штрафа с параметром $\delta > 0$

$$a_Y(\mathbf{u}^{1\delta}, \mathbf{w}) + \frac{1}{\delta} \langle \beta(\mathbf{u}^{1\delta}), \mathbf{w} \rangle = -L(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in H(Y). \quad (12)$$

Установим свойства оператора

$$A\mathbf{u}^{1\delta} + \frac{1}{\delta} \beta(\mathbf{u}^{1\delta}) : H(Y) \rightarrow H(Y)^*,$$

который определяется с помощью левой части уравнения (12). Для функций из $H(Y)$ в силу неравенства Корна [4, п. 11.3.] имеем

$$(A\mathbf{u}^{1\delta} - A\mathbf{v}, \mathbf{u}^{1\delta} - \mathbf{v}) \geq M\|\mathbf{u}^{1\delta} - \mathbf{v}\|^2, \quad M > 0. \quad (13)$$

Отсюда следует, что оператор $(A\mathbf{u}^{1\delta} + \frac{1}{\delta}\beta(\mathbf{u}^{1\delta}))$ как сумма двух монотонных является монотонным. Кроме того, он строго монотонный. Коэрцитивность оператора следует из соотношения

$$(A\mathbf{u}^{1\delta}, \mathbf{u}^{1\delta}) + \frac{1}{\delta}\langle\beta(\mathbf{u}^{1\delta}), \mathbf{u}^{1\delta}\rangle \geq (A\mathbf{u}^{1\delta}, \mathbf{u}^{1\delta}) \geq C_1\|\mathbf{u}^{1\delta}\|^2, \quad C_1 > 0. \quad (14)$$

Заметим, что в (14) выражение $\langle\beta(\mathbf{u}^{1\delta}), \mathbf{u}^{1\delta}\rangle$ неотрицательно, это следует из определения самого оператора $\beta(\mathbf{u}^{1\delta})$. Поскольку для произвольных функций $u_1, u_2, \mathbf{v} \in (H^1(Y_\Gamma))^3$ выражение

$$\left(A\mathbf{u}^{1\delta} + \frac{1}{\delta}\beta(\mathbf{u}^{1\delta})\right)(u_1 + \lambda u_2, \mathbf{v})$$

определяет непрерывную функцию по $\lambda \in \mathbb{R}$, имеем семинепрерывность оператора $A\mathbf{u}^{1\delta} + \frac{1}{\delta}\beta(\mathbf{u}^{1\delta})$. Его ограниченность следует из неравенства

$$\begin{aligned} \left\|A\mathbf{u}^{1\delta} + \frac{1}{\delta}\beta(\mathbf{u}^{1\delta})\right\| &= \sup_{\mathbf{v} \neq 0} \frac{|(A\mathbf{u}^{1\delta}, \mathbf{v}) + \delta^{-1}\langle\beta(\mathbf{u}^{1\delta}), \mathbf{v}\rangle|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &\leq \frac{C_3\|\mathbf{u}^{1\delta}\|\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leq C_3\|\mathbf{u}^{1\delta}\|. \end{aligned} \quad (15)$$

Существование постоянной $C_3 > 0$ в соотношении (15) следует из неравенства $|(A(\mathbf{u}, \mathbf{v}))| \leq C_2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ и непрерывности операторов следа. Согласно установленным свойствам оператора $(A\mathbf{u}^{1\delta} + \frac{1}{\delta}\beta(\mathbf{u}^{1\delta}))$ решение $\mathbf{u}^{1\delta}$ задачи (12) существует. В силу строгой монотонности оно единственно.

Теорема 1. Решения $\mathbf{u}^{1\delta}$ задачи со штрафом (12) сходятся сильно в $H(Y)$ к решению $\mathbf{u}^1$ задачи (11) при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство. В уравнение (12) подставим функцию $\mathbf{w} = \mathbf{u}^{1\delta}$. С учетом неравенства

$$\int_{Y_\Gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{v})e_{ij}(\mathbf{v}) \geq C_0 \int_{Y_\Gamma} e_{ij}(\mathbf{v})e_{ij}(\mathbf{v}) \geq C_1\|\mathbf{v}\|^2$$

получим

$$\begin{aligned} C_1\|\mathbf{u}^{1\delta}\|^2 &\leq \int_{Y_\Gamma} a_{ijkl} \frac{\partial u_k^{1\delta}}{\partial y_l} \frac{\partial u_i^{1\delta}}{\partial y_j} + \frac{1}{\delta}\langle\beta(\mathbf{u}^{1\delta}), \mathbf{u}^{1\delta}\rangle \\ &= - \int_{Y_\Gamma} a_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^{1\delta}}{\partial y_j} \leq C_2\|\mathbf{u}^{1\delta}\|, \quad C_1, C_2 > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) следует ограниченность $\mathbf{u}^{1\delta}$ в рефлексивном пространстве $H(Y)$. Это означает, что для подпоследовательности с прежним обозначением $\mathbf{u}^{1\delta}$ имеет место сходимость $\mathbf{u}^{1\delta} \rightarrow \mathbf{u}^{10}$ слабо в $H(Y)$ при $\delta \rightarrow 0$.

Покажем, что $\mathbf{u}^{10} \in \tilde{K}_{Y\Gamma}$. Для этого выразим из (12) оператор $\beta(\mathbf{u}^{1\delta})$:

$$\langle \beta(\mathbf{u}^{1\delta}), \mathbf{w} \rangle = \delta(-a_Y(\mathbf{u}^{1\delta}, \mathbf{w}) - L(\mathbf{w})) \quad \forall \mathbf{w} \in H(Y). \quad (17)$$

Поскольку $|a_Y(\mathbf{u}^{1\delta}, \mathbf{w})| \leq C\|\mathbf{u}^{1\delta}\|\|\mathbf{w}\|$, а $\mathbf{u}^{1\delta}$ — ограниченная последовательность, из (17) имеем

$$\|\beta(\mathbf{u}^{1\delta})\| \leq C\delta, \quad (18)$$

где C — постоянная, не зависящая от δ . Монотонность оператора β позволяет выписать следующее неравенство:

$$\langle \beta(\mathbf{u}^{1\delta}) - \beta(\mathbf{w}), \mathbf{u}^{1\delta} - \mathbf{w} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{w} \in H(Y).$$

Отсюда с учетом (18) и слабой сходимости $\mathbf{u}^{1\delta} \rightharpoonup \mathbf{u}^{10}$ после перехода к пределу при $\delta \rightarrow 0$ выводим

$$-\langle \beta(\mathbf{w}), \mathbf{u}^{10} - \mathbf{w} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{w} \in H(Y).$$

Положив теперь $\mathbf{w} = \mathbf{u}^{10} - \lambda\boldsymbol{\eta}$, $\lambda > 0$, где $\boldsymbol{\eta}$ — произвольная функция из пространства $H(Y)$, получим

$$\langle \beta(\mathbf{u}^{10} - \lambda\boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\eta} \rangle \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H(Y).$$

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, в силу семинепрерывности β из последнего соотношения заключаем, что $\beta(\mathbf{u}^{10}) = 0$, следовательно, $\mathbf{u}^{10} \in \tilde{K}_{Y\Gamma}$.

Докажем, что $\mathbf{u}^{10} = \mathbf{u}^1$ — решение вариационной задачи (11). Из (12) следует соотношение

$$\mathbf{u}^{1\delta} \in H(Y), \quad a_Y(\mathbf{u}^{1\delta}, \mathbf{w} - \mathbf{u}^{1\delta}) + L(\mathbf{w} - \mathbf{u}^{1\delta}) + \frac{1}{\delta} \langle \beta(\mathbf{u}^{1\delta}), \mathbf{w} - \mathbf{u}^{1\delta} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in H(Y). \quad (19)$$

Пусть $\mathbf{w} \in \tilde{K}_{Y\Gamma}$, тогда $\beta(\mathbf{w}) = 0$ и

$$\langle -\beta(\mathbf{u}^{1\delta}), \mathbf{w} - \mathbf{u}^{1\delta} \rangle = \langle \beta(\mathbf{w}) - \beta(\mathbf{u}^{1\delta}), \mathbf{w} - \mathbf{u}^{1\delta} \rangle \geq 0.$$

Следовательно, из (19) получим неравенство

$$a_Y(\mathbf{u}^{1\delta}, \mathbf{w} - \mathbf{u}^{1\delta}) + L(\mathbf{w} - \mathbf{u}^{1\delta}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{w} \in H(Y). \quad (20)$$

Переходя к пределу в неравенстве (20), в силу слабой полунепрерывности снизу $a_Y(\cdot, \cdot)$ получаем

$$a_Y(\mathbf{u}^{10}, \mathbf{w} - \mathbf{u}^{10}) + L(\mathbf{w} - \mathbf{u}^{10}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{w} \in H(Y).$$

Отсюда, принимая во внимание единственность решения вариационного неравенства, заключаем, что $\mathbf{u}^{10} = \mathbf{u}^1$. Таким образом, в силу единственности решения вариационной задачи последовательность $\mathbf{u}^{1\delta}$ сходится слабо к $\mathbf{u}^1$ в $H(Y)$ для любой последовательности $\delta \rightarrow 0$.

Установим теперь сильную сходимость. Для этого вычтем $a_Y(\mathbf{u}^1, \mathbf{w})$ из (12) и рассмотрим полученное уравнение на элементе $\mathbf{w} = \mathbf{u}^{1\delta} - \mathbf{u}^1$. Имеем

$$a_Y(\mathbf{u}^{1\delta} - \mathbf{u}^1, \mathbf{u}^{1\delta} - \mathbf{u}^1) + \frac{1}{\delta} \langle \beta(\mathbf{u}^{1\delta}), \mathbf{u}^{1\delta} - \mathbf{u}^1 \rangle + a_Y(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^{1\delta} - \mathbf{u}^1) + L(\mathbf{u}^{1\delta} - \mathbf{u}^1) = 0.$$

Включение $\mathbf{u}^1 \in \tilde{K}_{Y\Gamma}$ влечет $\beta(\mathbf{u}^{1\delta}) = 0$, отсюда в силу монотонности получим

$$\langle \beta(\mathbf{u}^{1\delta}), \mathbf{u}^{1\delta} - \mathbf{w} \rangle = \langle \beta(\mathbf{u}^{1\delta}) - \beta(\mathbf{w}), \mathbf{u}^{1\delta} - \mathbf{w} \rangle \geq 0. \quad (21)$$

Неравенство (21) вместе с неравенством Корна позволяет записать следующую оценку:

$$M\|\mathbf{u}^{1\delta} - \mathbf{u}^1\|^2 \leq -L(\mathbf{u}^{1\delta} - \mathbf{u}^1) - a_Y(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^{1\delta} - \mathbf{u}^1).$$

Правая часть в данном соотношении стремится к нулю в силу слабой сходимости. Отсюда следует, что решение $\mathbf{u}^{1\delta}$ задачи со штрафом (12) сходится сильно к решению $\mathbf{u}^1$ задачи (11) при $\delta \rightarrow 0$ в пространстве $H(Y)$. Теорема доказана.

Теорема 2. Уравнение со штрафом (12) при достаточно гладком решении эквивалентно следующей краевой задаче:

$$-\sigma_{ij,j}(\mathbf{u}^{1\delta}) = 0 \text{ на } Y, \quad (22)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}^{1\delta}) = a_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^{1\delta}}{\partial y_l} \right),$$

$$[\sigma_\nu(\mathbf{u}^{1\delta})] = [\sigma_\tau(\mathbf{u}^{1\delta})] = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (23)$$

$$\sigma_\nu(\mathbf{u}^{1\delta}) = \frac{1}{\delta} [\mathbf{u}_\nu^{1\delta}]_-, \quad \sigma_\tau(\mathbf{u}^{1\delta}) = 0 \text{ на } \Gamma^\pm. \quad (24)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{w} = \boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in C_0^\infty(Y_\Gamma)$. Подставляя $\boldsymbol{\varphi}$ в уравнение (12), получим

$$a_Y(\mathbf{u}^{1\delta}, \boldsymbol{\varphi}) + L(\boldsymbol{\varphi}) = 0. \quad (25)$$

Это означает, что уравнения равновесия (22) выполняются в смысле обобщенных функций.

Для вывода краевых условий (23), (24) воспользуемся тем, что Γ можно продолжить до замкнутой гладкой кривой $\Sigma \subset Y$ такой, что $\Gamma \subset \Sigma$. Следовательно, Y_Γ разбивается на две подобласти Y_1 и Y_2 с границами Σ и $\Sigma \cup \partial Y$ соответственно. Воспользуемся формулой Грина

$$\int_{Y_\Gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) = - \int_{Y_\Gamma} \sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) v_i - \int_{\Gamma} ([\sigma_\nu(\mathbf{u}) \mathbf{v}_\nu] + [\sigma_{\tau i}(\mathbf{u}) v_{\tau i}]),$$

справедливой для гладких функции $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Интегрируя по частям (12) по заданной формуле Грина, в силу (22) имеем

$$- \int_{\Gamma} ([\sigma_\nu(\mathbf{u}^{1\delta}) \mathbf{v}_\nu] + [\sigma_{\tau i}(\mathbf{u}^{1\delta}) v_{\tau i}]) + \frac{1}{\delta} \int_{\Gamma} [\mathbf{u}_\nu^{1\delta}]_- [\mathbf{v}_\nu] = 0. \quad (26)$$

Пусть $[\mathbf{v}_\nu] = 0$ в (26). Тогда

$$- \int_{\Gamma} [\sigma_\nu(\mathbf{u}^{1\delta})] \mathbf{v}_\nu - \int_{\Gamma} [\sigma_{\tau i}(\mathbf{u}^{1\delta})] v_{\tau i} = 0.$$

Отсюда в силу произвольности слагаемых $\mathbf{v}_\nu$, $v_{\tau i}$, следуют краевые условия (23). Используя условия (23) в равенстве (26), имеем

$$- \int_{\Gamma} (\sigma_\nu(\mathbf{u}^{1\delta}) [\mathbf{v}_\nu] + \sigma_{\tau i}(\mathbf{u}^{1\delta}) [v_{\tau i}]) + \frac{1}{\delta} \int_{\Gamma} [\mathbf{u}_\nu^{1\delta}]_- [\mathbf{v}_\nu] = 0. \quad (27)$$

Из (27) получим условия (24). Теорема доказана.

3. Итерационный метод для уравнения со штрафом

В силу коэрцитивности и ограниченности $a_Y(\cdot, \cdot)$ можно ввести скалярное произведение

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = a_Y(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \int_{\Gamma} [\mathbf{u}_\nu][\mathbf{w}_\nu] d\Gamma \quad (28)$$

и эквивалентную норму $\|\mathbf{u}\|_a^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$ в заданном пространстве $H(Y)$. В силу эквивалентности норм найдется постоянная $C > 0$ такая, что

$$a_Y(\cdot, \cdot) \geq C \|\cdot\|_a^2. \quad (29)$$

Для приближенного решения вариационного неравенства (11) рассмотрим нелинейное уравнение со штрафом (12):

$$a_Y(\mathbf{u}^{1\delta}, \mathbf{w}) + \frac{1}{\delta} \langle \beta(\mathbf{u}^{1\delta}), \mathbf{w} \rangle = -L(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in H(Y).$$

Зафиксируем δ и построим следующую итерационную процедуру для произвольной функции $\mathbf{u}^{1\delta,0} \in H(Y)$, $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$a_Y(\mathbf{u}^{1\delta,n+1}, \mathbf{w}) + \frac{1}{\delta} (\mathbf{u}^{1\delta,n+1} - \mathbf{u}^{1\delta,n}, \mathbf{w}) = -L(\mathbf{w}) - \frac{1}{\delta} \langle \beta(\mathbf{u}^{1\delta,n}), \mathbf{w} \rangle \quad \forall \mathbf{w} \in H(Y). \quad (30)$$

Существует единственное решение $\mathbf{u}^{1\delta,n+1} \in H(Y)$ задачи (30).

Теорема 3. *Имеет место сходимость $\mathbf{u}^{1\delta,n+1} \rightarrow \mathbf{u}^{1\delta}$ сильно в $H(Y)$ при $n \rightarrow \infty$. При этом выполнена оценка*

$$\|\mathbf{u}^{1\delta,n+1} - \mathbf{u}^{1\delta}\|_a^2 \leq (1 + 2C\delta)^{-(n+1)} \|\mathbf{u}^{1\delta,0} - \mathbf{u}^{1\delta}\|_a^2. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом доказательства аналогичной теоремы из [3, п. 2.10.2] в случае упругой пластины с одним разрезом.

Вычитая уравнение со штрафом (12) из (30) и добавляя $-\frac{1}{\delta}(\mathbf{u}^{1\delta}, \mathbf{w})$ в обе части равенства, получим

$$\begin{aligned} a_Y(\mathbf{u}^{1\delta,n+1} - \mathbf{u}^{1\delta}, \mathbf{w}) + \frac{1}{\delta} (\mathbf{u}^{1\delta,n+1} - \mathbf{u}^{1\delta}, \mathbf{w}) \\ = \frac{1}{\delta} (\mathbf{u}^{1\delta,n} - \mathbf{u}^{1\delta}, \mathbf{w}) - \frac{1}{\delta} \langle \beta(\mathbf{u}^{1\delta,n}) - \beta(\mathbf{u}^{1\delta}), \mathbf{w} \rangle. \end{aligned} \quad (32)$$

Подставим тестовую функцию $\mathbf{w} = \mathbf{u}^{1\delta,n+1} - \mathbf{u}^{1\delta}$ в (32). Используя определение (28), перепишем правую часть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} a_Y(\mathbf{u}^{1\delta,n} - \mathbf{u}^{1\delta}, \mathbf{u}^{1\delta,n+1} - \mathbf{u}^{1\delta}) \\ + \frac{1}{\delta} \int_{\Gamma} ([(\mathbf{u}^{1\delta,n} - \mathbf{u}^{1\delta})_\nu] + [\mathbf{u}_\nu^{1\delta,n}]_- - [\mathbf{u}_\nu^{1\delta}]_-) [(\mathbf{u}^{1\delta,n+1} - \mathbf{u}^{1\delta})_\nu] d\Gamma. \end{aligned} \quad (33)$$

Для функции скачка $s = s_+ - s_-$, $s_+, s_- \geq 0$, имеем

$$s_1 - s_2 + s_{1-} - s_{2-} = s_{1+} - s_{2+} \leq |s_1 - s_2|.$$

Тогда в силу неравенства

$$a(\bar{\xi}, \bar{\xi}) + a(\bar{\eta}, \bar{\eta}) - 2a(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = a(\bar{\xi} - \bar{\eta}, \bar{\xi} - \bar{\eta}) \geq 0$$

(33) будет не больше, чем

$$\frac{1}{2\delta} (\|\mathbf{u}^{1\delta, n} - \mathbf{u}^{1\delta}\|_a^2 + \|\mathbf{u}^{1\delta, n+1} - \mathbf{u}^{1\delta}\|_a^2).$$

С другой стороны, в силу (29) для левой части имеем

$$\begin{aligned} a_Y(\mathbf{u}^{1\delta, n+1} - \mathbf{u}^{1\delta}, \mathbf{u}^{1\delta, n+1} - \mathbf{u}^{1\delta}) + \frac{1}{\delta}(\mathbf{u}^{1\delta, n+1} - \mathbf{u}^{1\delta}, \mathbf{u}^{1\delta, n+1} - \mathbf{u}^{1\delta}) \\ \geq \left(C + \frac{1}{\delta}\right) \|\mathbf{u}^{1\delta, n+1} - \mathbf{u}^{1\delta}\|_a^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом,

$$\|\mathbf{u}^{1\delta, n+1} - \mathbf{u}^{1\delta}\|_a^2 \leq (1 + 2C\delta)^{-1} \|\mathbf{u}^{1\delta, n} - \mathbf{u}^{1\delta}\|_a^2. \quad (35)$$

Повторив оценку при $n, n-1, \dots, 0$, получим (31) и утверждение о сильной сходимости. Теорема доказана.

Предложенный итерационный алгоритм можно использовать для приближенного решения вариационного неравенства (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Санчес-Паленсия Е. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
2. Пастухова С. Е. Об усреднении одного вариационного неравенства для упругого тела с периодически расположенными трещинами // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 2. С. 149–164.
3. Khludnev A. M., Kovtunen V. A. Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
4. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
5. Kovtunen V. A. Numerical simulation of the non-linear crack problem with non-penetration // Math. Meth. Appl. Sci. 2004. V. 27. P. 163–179.
6. Rudoy E. Domain decomposition method for crack problems with nonpenetration condition // Math. Modelling Numer. Anal. 2016. V. 50, N 4. P. 995–1009.
7. Ковтуненко В. А. Метод численного решения упругой задачи о контакте упругой пластины с препятствием // Прикл. механика и техн. физика. 1994. Т. 35, № 5. С. 142–146.
8. Ковтуненко В. А. Итерационный метод штрафа для задачи с ограничениями на внутренней границе // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 587–591.
9. Лазарев Н. П. Итерационный метод штрафа для нелинейной задачи о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину // Сиб. журн. вычисл. математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 397–408.
10. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
11. Cioranescu D., Damlamian A., Griso G. The periodic unfolding method in homogenization // SIAM J. Math. Anal. Soc. Industr. Appl. Mathematics. 2008. V. 40, N 4. P. 1585–1620.
12. Cioranescu D., Damlamian A., Orlik J. Homogenization via unfolding in periodic elasticity with contact on closed and open cracks // Asymptotic Analysis. 2013. V. 82. P. 201–232.
13. Griso G., Migunova A., Orlik J. Homogenization via unfolding in periodic layer with contact // Asymptotic Analysis. IOS Press. 2016. V. 99. P. 23–52.

14. Griso G., Orlik J. Homogenization of contact problem with Coulomb's friction on periodic cracks // arXiv:1811.06615 [math.AP].

Поступила в редакцию 25 марта 2019 г.

После доработки 14 мая 2019 г.

Принята к публикации 3 июня 2019 г.

Неустроева Наталья Валериановна, Афанасьева Надежда Михайловна,
Егорова Алена Андреевна
Северо-Восточный федеральный университет,
Институт математики и информатики,
Кулаковского, 42, Якутск 677000
nnataliav@mail.ru, afanasieva.nm@gmail.com, alena.egorova@gmail.com

A VARIATIONAL PROBLEM FOR AN ELASTIC BODY WITH PERIODICALLY LOCATED CRACKS

N. V. Neustroeva, N. M. Afanas'eva,
and A. A. Egorova

Abstract: We consider a nonlinear problem of equilibrium of an elastic body with periodically located cracks. On the edges of these cracks, non-penetration conditions are given. The nonlinear problem is formulated in the form of variational inequality. The period of distribution of the cracks, as well as their sizes, depends on a small parameter. The behavior of the solution to the problem with periodically located cracks is determined by the first two terms $\mathbf{u}^0(x)$ and $\mathbf{u}^1(x, y)$ of the asymptotic expansion. In this paper, we study the solution of the variational inequality on a periodicity cell (a local problem). For the first corrector $\mathbf{u}^1(x, y)$, we construct a penalty equation and a linear iterative equation in integral form. We prove that the sequence of solutions of the problem with penalty converges to the solution of the problem on the cell when the small regularization parameter tends to zero. We show that the approximate solution of the iteration equation converges strongly to the solution of the penalty equation.

DOI: 10.25587/SVFU.2019.102.31509

Keywords: elastic body, crack, homogenization, penalty method.

REFERENCES

1. Sanchez-Palencia E., Non-Homogeneous Media and Vibration Theory [in Russian], Mir, Moscow (1984).
2. Pastukhova S. E., "On homogenization of a variational inequality for an elastic body with periodically distributed fissures," *Sb. Math.*, **191**, No. 2, 291–306 (2000).
3. Khludnev A. M. and Kovtunen V. A., Analysis of Cracks in Solids, WIT Press, Southampton; Boston (2000).
4. Khludnev A. V., Elasticity Problems in Nonsmooth Domains [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2010).
5. Kovtunen V. A., "Numerical simulation of the non-linear crack problem with non-penetration," *Math. Meth. Appl. Sci.*, **27**, 163–179 (2004).
6. Rudoy E., "Domain decomposition method for crack problems with nonpenetration condition," *Math. Model. Numer. Anal.*, **50**, No. 4, 995–1009 (2016).
7. Kovtunen V. A., "A method of numerical solution of the problem of contact between an elastic plate and an obstacle [in Russian]," *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, **35**, No. 5, 142–146 (1994).
8. Kovtunen V. A., "An iterative penalty method for a problem with constraints on the inner boundary," *Sib. Mat. Zh.*, **37**, No. 3, 587–591 (1996).
9. Lazarev N. P., "An iterative penalty method for a nonlinear problem of equilibrium of a Timoshenko-type plate with a crack," *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, **14**, No. 4, 397–408 (2011).
10. Lions J.-L., Some Methods of Solving Nonlinear Boundary Value Problems [in Russian], Mir, Moscow (1972).

The authors were supported by the Government of the Russian Federation Megagrant No. 14.Y26.31.0013.

11. Cioranescu D., Damlamian A., and Griso G., "The periodic unfolding method in homogenization," SIAM J. Math. Anal. Soc. Ind. Appl. Math., **40**, No. 4, 1585–1620 (2008).
12. Cioranescu D., Damlamian A., and Orlik J., "Homogenization via unfolding in periodic elasticity with contact on closed and open cracks," Asympt. Anal., **82**, 201–232 (2013).
13. Griso G., Migunova A., and Orlik J., "Homogenization via unfolding in periodic layer with contact," Asympt. Anal., **99**, 23–52 (2016).
14. Griso G. and Orlik J., "Homogenization of contact problem with Coulomb's friction on periodic cracks," arXiv:1811.06615 [math.AP].

Submitted March 25, 2019

Revised May 14, 2019

Accepted June 3, 2019

Natalia V. Neustroeva, Nadezhda M. Afanas'eva, and Alena A. Egorova
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
42 Kulakovskiy Street, Yakutsk 677000, Russia
nnataliav@mail.ru, afanasieva.nm@gmail.com, alena.egorova@gmail.com