

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. И. Кожанов, А. В. Дюжева

Аннотация. Изучается разрешимость нелокальной задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений соболевского типа третьего порядка. С использованием спектральных разложений доказываются теоремы существования и единственности решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение.

DOI: 10.25587/SVFU.2020.80.43.003

Ключевые слова: дифференциальные уравнения соболевского типа, задачи с интегральными условиями, регулярные решения, существование, единственность.

1. Введение

Работа посвящена исследованию разрешимости нелокальной задачи с двумя интегральными по выделенной переменной t условиями для дифференциальных уравнений

$$u_{tt} + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta u = f(x, t) \quad (*)$$

(α, β — действительные постоянные, Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_n$).

Уравнения (*) и близкие к ним уравнения в некоторых источниках называют уравнениями соболевского типа [1, 2], уравнениями составного типа [3], или же псевдогоперболическими уравнениями [4, 5]. Разрешимость локальных краевых задач для таких уравнений представляется хорошо изученной. Значительно менее изучены для уравнений (*) задачи с нелокальными и, в частности интегральными, условиями. Применительно к уравнениям (*) можно сказать, что ранее изучались нелокальные задачи с пространственно-интегральными условиями [6]. Что же касается задач с интегральными условиями по временной (выделенной) переменной, то здесь прежде всего назовем работу [7]. В этой работе использовался прием, основанный на применении операторов, определяющих интегральные условия, к уравнению, использовании формулы интегрирования

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 0778–2020–0005.

по частям и переходе от задачи с чисто интегральными условиями к задаче с «полуинтегральными» условиями, в которой обычные начальные условия при $t = 0$ связываются со значениями решения при $t > 0$.

Другой подход к задачам с интегральными условиями для уравнений третьего порядка применялся в недавней работе [8]. В этой работе изучалась задача для уравнений (*) с одним интегральным условием и одним локальным (точечным) условием. Настоящую работу можно считать продолжением работы [8] — в ней будет изучаться разрешимость нелокальной задачи для уравнений (*) с двумя интегральными условиями. Техника, используемая в настоящей работе, близка к технике работы [8] (см. также [9]), но в то же время имеет некоторые существенные отличия.

Уточним, что целью настоящей работы будет доказательство разрешимости изучаемой нелокальной задачи в классе регулярных решений, т. е. решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение.

Доказательства, построения и рассуждения в работе будут проведены с использованием свойств пространств Лебега L_p , Соболева W_p^l , а также пространств $L_p(0, T; X)$. Определения этих пространств и свойства функций из них можно найти в монографиях [10–12].

1. Постановка задачи. Существование и единственность решений

Пусть Ω — ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ , Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (0, T)$ — боковая граница Q . Далее, пусть α и β — заданные действительные числа, причем $\alpha \neq 0$, $f(x, t)$, $N_1(t)$ и $N_2(t)$ — заданные действительнoзначные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

Нелокальная задача. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta u = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (2)$$

$$\int_0^T N_1(t) u(x, t) dt = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$\int_0^T N_2(t) u(x, t) dt = 0, \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ соответственно ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций и система собственных чисел задачи

$$\Delta w = \lambda w \quad \text{в } \Omega, \quad w|_\Gamma = 0,$$

причем собственные числа λ_k расположены в монотонно убывающую последовательность. Существование указанных систем собственных функций и собственных чисел известно (см. [13, 14]), известно также, что функции $w_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, образуют базис в пространстве $L_2(\Omega)$ и что числа λ_k все отрицательны, последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ не имеет конечных предельных точек.

Положим

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)), \\ \Delta v_t(x, t) \in L_2(Q), \quad v_{tt}(x, t) \in L_2(Q)\}.$$

Нормируем множество V :

$$\|v\|_V = (\|v\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|\Delta v_t\|_{L_2(Q)}^2)^{1/2}.$$

Всюду далее *регулярным решением нелокальной задачи* (1)–(4) будем называть решение уравнения, принадлежащее этому пространству и такое, что для него выполняются условия (3) и (4).

Положим для $j = 1, 2, \dots$

$$z_{j,1} = \frac{1}{2}(-\alpha\lambda_j + \sqrt{\alpha^2\lambda_j^2 - 4p\lambda_j}), \quad z_{j,2} = \frac{1}{2}(-\alpha\lambda_j - \sqrt{\alpha^2\lambda_j^2 - 4p\lambda_j}).$$

Теорему единственности решений нелокальной задачи (1)–(4) сформулируем для простейшего случая различных чисел $z_{j,1}$ и $z_{j,2}$ (случай совпадения чисел $z_{j,1}$ и $z_{j,2}$ отличается от рассмотренного лишь более громоздкими выкладками).

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$N_i(t) \in C([0, T]), \quad (6)$$

$$z_{j,1} \neq z_{j,2}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$\int_0^T N_1(t)e^{z_{j,2}t} dt \cdot \int_0^T N_2(t)e^{z_{j,1}t} dt \neq \int_0^T N_1(t)e^{z_{j,1}t} dt \cdot \int_0^T N_2(t)e^{z_{j,2}t} dt. \quad (8)$$

Тогда нелокальная задача (1)–(4) не может иметь в пространстве V более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для возможного решения $u(x, t)$ уравнения (1) в случае $f(x, t) \equiv 0$ имеет место представление

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) w_k(x)$$

с функциями $\varphi_k(t)$, являющимися решениями обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi_k''(t) + \alpha\lambda_k\varphi_k'(t) + \beta\lambda_k\varphi_k(t) = 0.$$

Учитывая, что при выполнении условия (7) функции $\varphi_k(t)$ имеют вид

$$\varphi_k(t) = C_{1,k}e^{z_{j,1}t} + C_{2,k}e^{z_{j,2}t},$$

и учитывая, что для функции $u(x, t)$ должны выполняться условия (3) и (4), нетрудно получить для чисел $C_{1,k}$ и $C_{2,k}$ линейную однородную систему, определитель которой вследствие условия (8) отличен от нуля. Но тогда числа $C_{1,k}$ и $C_{2,k}$ равны нулю, функции $\varphi_k(t)$ и в целом функция $u(x, t)$ будут тождественно нулевыми. А это и означает, что нелокальная задача (1)–(4) не может иметь в пространстве V более одного решения.

Теорема доказана.

Исследование разрешимости нелокальной задачи (1)–(4) также будет проведено с помощью метода спектральных разложений.

Для $k = 1, 2, \dots$ положим

$$D_{k,j} = \int_0^T N_1(t) e^{z_{k,j}t} dt, \quad E_{k,j} = \int_0^T N_2(t) e^{z_{k,j}t} dt, \quad j = 1, 2,$$

$$d_k = D_{k,2}E_{k,1} - D_{k,1}E_{k,2}.$$

Утверждение 1. Пусть функции $N_1(t)$ и $N_2(t)$ линейно независимы на отрезке $[0, T]$, и пусть выполняются условия

$$\alpha < 0, \quad \beta \leq 0, \quad (9)$$

$$N_1(t) \in C([0, T]), \quad N_1(t) \geq N_0 > 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

$$N_2(t) \in C^{m+1}([0, T]), \quad N_2(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T],$$

$$N_2^{(i)}(0) \leq 0, \quad N_2^{(i)}(T) \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (11)$$

Тогда найдется натуральное число k_0 такое, что при $k \geq k_0$, $k \in \mathbb{N}$, выполняются неравенства

$$d_k \geq \frac{d_0}{|z_{k,2}|}$$

с положительным числом d_0 , определяющимся функциями $N_1(t)$ и $N_2(t)$, а также числами α , β и T .

Доказательство. Пусть k_1 — наименьшее натуральное число такое, что при $k \geq k_1$ выполняется $\alpha^2 \lambda_k^2 - 4\beta \lambda_k > 0$. Тогда при $k \geq k_1$ числа $z_{k,1}$ и $z_{k,2}$ различные, для них выполняются неравенства

$$z_{k,2} \leq -\alpha \lambda_k \leq -\frac{4\beta}{\alpha} \leq -\frac{2\beta}{\alpha} \leq z_{k,1} \leq -\frac{\beta}{\alpha},$$

и для чисел $z_{k,2}$ будет иметь место свойство

$$z_{k,2} \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Положим

$$d_{0,1} = N_0 e^{-\frac{4\beta T}{\alpha}} \cdot (1 - e^{-\frac{2\beta T}{\alpha}}) \int_0^T N_2(t) dt.$$

Используя указанные выше свойства чисел $z_{k,1}$ и $z_{k,2}$, нетрудно установить справедливость при $k \geq k_1$ неравенств

$$\int_0^T N_1(t) e^{z_{k,2}t} dt \cdot \int_0^T N_2(t) e^{z_{k,1}t} dt \geq \frac{d_{0,1}}{|z_{k,2}|}. \quad (12)$$

Определим число $d_{0,2}$:

$$d_{0,2} = \max_{[0,T]} |N_2^{(m+1)}(t)| \cdot \int_0^T N_1(t) dt.$$

Имеет место следующая цепочка равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} \int_0^T N_1(t) e^{z_{k,1}t} dt \cdot \int_0^T N_2(t) e^{z_{k,2}t} dt &\leq \int_0^T N_1(t) dt \cdot \int_0^T N_2(t) e^{z_{k,2}t} dt \\ &= \int_0^T N_1(t) dt \left[\frac{N_2(T) e^{z_{k,2}T} - N_2(0)}{z_{k,2}} + \frac{1}{|z_{k,2}|} \int_0^T N_2'(t) e^{z_{k,2}t} dt \right] \\ &\leq \int_0^T N_1(t) dt \cdot \frac{1}{|z_{k,2}|} \left[\frac{N_2'(T) e^{z_{k,2}T} - N_2'(0)}{z_{k,2}} + \frac{1}{|z_{k,2}|} \int_0^T N_2''(t) e^{z_{k,2}t} dt \right] \\ &\leq \dots \leq \frac{d_{0,2}}{|z_{k,2}|^{m+1}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (12) и (13) вытекает оценка

$$d_k \geq \frac{1}{|z_{k,2}|} \left(d_{0,1} - \frac{d_{0,2}}{|z_{k,2}|^m} \right). \quad (14)$$

Пусть k_0 — наименьшее из натуральных чисел, больших k_1 и таких, что при $k \geq k_0$ выполняется равенство

$$|z_{k,2}|^m > \frac{d_{0,2}}{d_{0,1}} \quad (15)$$

(вследствие сходимости последовательности $\{z_{k,2}\}$ к $-\infty$ такое число k_0 существует). Далее, существует положительное число δ_0 такое, что при $k > k_0$ выполняется неравенство

$$|z_{k,2}|^m > (1 + \delta_0) \frac{d_{0,2}}{d_{0,1}}.$$

Положим

$$\gamma_0 = 1 - \frac{1}{1 + \delta_0}.$$

Имеет место неравенство

$$d_{0,1} - \frac{d_{0,2}}{|z_{k,2}|^m} > \gamma_0 d_{0,1}.$$

Но тогда из (14) и следует, что при $k \geq k_0$ выполняется требуемая оценка

$$d_k \geq \frac{d_{0,1}}{|z_{k,2}|}, \quad d_0 = \gamma_0 d_{0,1}.$$

Утверждение доказано.

Утверждение 2. Пусть функции $N_1(t)$ и $N_2(t)$ линейно независимы на отрезке $[0, T]$, и пусть выполняется условие

$$\alpha < 0, \quad \beta > 0, \quad (9')$$

а также условия (10) и (11). Тогда найдется натуральное число k_0^* такое, что при $k \geq k_0^*$, $k \in \mathbb{N}$, выполняются неравенства

$$d_k \geq \frac{d_0^*}{|z_{k,2}|}$$

с положительным числом d_0^* , определяющимся функциями $N_1(t)$ и $N_2(t)$, а также числами α , β , T и λ_1 .

Доказательство. Вследствие условия (9') для чисел $z_{k,1}$ и $z_{k,2}$ выполняются неравенства $z_{k,2} < -\alpha\lambda_1 < 0 < z_{k,1} < -\frac{2\beta}{\alpha}$, и для чисел $z_{k,2}$ будет иметь место свойство $z_{k,2} \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Дальнейшие рассуждения вполне соответствуют рассуждениям, проведенным при доказательстве утверждения 1. Уточним лишь, что здесь $k_1 = 1$, вместо числа $d_{0,1}$ следует взять число

$$d_{0,1}^* = N_0 (1 - e^{-\alpha\lambda_1 T}) \int_0^T N_2(t) dt,$$

вместо числа $d_{0,2}$ нужно будет взять число

$$d_{0,2}^* = \int_0^T N_1(t) e^{-\frac{2\beta t}{\alpha}} dt \cdot \max_{[0,T]} |N_2^{(m+1)}(t)|,$$

число k_0^* будет определяться как наименьшее натуральное число такое, что при $k \geq k_0^*$ выполняется неравенство

$$|z_{k,2}|^m > \frac{d_{0,2}^*}{d_{0,1}^*}.$$

Утверждение доказано.

Рассмотрим задачу: найти функцию $v_0(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условие

$$v_0(x, 0) = v_{0t}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (16)$$

Утверждение 3. Пусть число α отрицательно. Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(0, T; W_2^6(\Omega))$, $f(x, t) = \Delta f(x, t) = \Delta^2 f(x, t) = 0$ при $(x, t) \in S$, краевая задача (1), (2), (16) имеет решение $v_0(x, t)$ такое, что $\Delta^p v_0(x, t) \in L_2(Q)$, $\Delta^p v_{0t}(x, t) \in L_2(Q)$, $p = \overline{0, 4}$, $\Delta^p v_{0tt}(x, t) \in L_2(Q)$, $p = \overline{0, 3}$.

Доказательство. Пусть ε — положительное число. Рассмотрим задачу: найти функцию $v(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$v_{tt} + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta v - \varepsilon \Delta^7 v_t = f(x, t) \quad (1_\varepsilon)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (16), а также условие

$$\begin{aligned}\Delta v(x, t)|_S &= \Delta^2 v(x, t)|_S = \Delta^3 v(x, t)|_S = \Delta^4 v(x, t)|_S \\ &= \Delta^5 v(x, t)|_S = \Delta^6 v(x, t)|_S = 0.\end{aligned}$$

Данная краевая задача при фиксированном ε имеет решение, обладающее принадлежащими пространству $L_2(Q)$ производными, входящими в уравнение. Умножая уравнение (1_ε) на функцию $-\Delta^7 v_t$, интегрируя по цилиндру с переменным верхним пределом с использованием формулы интегрирования по частям, далее умножая уравнение (1_ε) на функцию $-\Delta^6 v_{tt}$, повторяя процедуру интегрирования, наконец, применяя лемму Гронуолла, нетрудно получить при выполнении условий теоремы на функцию $f(x, t)$ априорные оценки, которые позволят перейти к пределу по параметру ε к требуемому решению краевой задачи (1), (2), (16).

Утверждение доказано.

Данное утверждение означает, в частности, что решение $v_0(x, t)$ краевой задачи (1), (2), (16) можно представить рядом Фурье:

$$v_0(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) w_k(x), \quad v_k(t) = \int_{\Omega} v_0(x, t) w_k(x, t) dx.$$

Определим числа A_k и B_k :

$$A_k = \sqrt{\alpha^2 \lambda_k^2 - 4\beta \lambda_k} \int_{\Omega} N_1(t) v_k(t) dt, \quad B_k = \sqrt{\alpha^2 \lambda_k^2 - 4\beta \lambda_k} \int_{\Omega} N_2(t) v_k(t) dt.$$

Теорема 2. Пусть $\alpha < 0$, $\beta \neq 0$, функции $N_1(t)$ и $N_2(t)$ линейно независимы на отрезке $[0, T]$, выполняются условия (10) и (11), и пусть для $k = 1, \dots, k_0 - 1$ в случае $\beta \leq 0$, или же для $k = 1, \dots, k_0^* - 1$ в случае $\beta > 0$ выполняются условия (7) и (8). Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(0, T; W_2^6(\Omega))$ такой, что $f(x, t) = \Delta f(x, t) = \Delta^2 f(x, t) = 0$ при $(x, t) \in S$, нелокальная задача (1)–(4) имеет решение, принадлежащее пространству V , и притом ровно одно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующую алгебраическую систему относительно чисел a_k и b_k :

$$a_k(z_{k,1} D_{k,2} - z_{k,2} D_{k,1}) + b_k(D_{k,1} - D_{k,2}) = -A_k, \quad (17)$$

$$a_k(z_{k,1} E_{k,2} - z_{k,2} E_{k,1}) + b_k(E_{k,1} - E_{k,2}) = -B_k. \quad (18)$$

Определитель этой системы есть число d_k , и это число отлично от нуля при $k = 1, \dots, k_0 - 1$ в случае $\beta \leq 0$, при $k = 1, \dots, k_0^* - 1$ в случае $\beta > 0$ — вследствие условия теоремы, при $k \geq k_0$ или соответственно при $k \geq k_0^*$ — вследствие утверждений 1 и 2. Значит, система (17), (18) для любого натурального числа k имеет единственное решение $\{a_k, b_k\}$. Определим функции $c_k(t)$:

$$c_k(t) = \frac{b_k - a_k z_{k,2}}{z_{k,1} - z_{k,2}} e^{z_{k,1} t} + \frac{a_k z_{k,1} - b_k}{z_{k,1} - z_{k,2}} e^{z_{k,2} t}.$$

Для этих функций выполняются равенства

$$c_k''(t) + \alpha \lambda_k c_k'(t) + \beta \lambda_k c_k(t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad c_k(0) = a_k, \quad c_k'(0) = b_k.$$

Положим

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k w_k(x).$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат пространствам $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ соответственно, то краевая задача

$$u_{0tt} + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta u_0 = 0, \quad u_0(x, t)|_S = 0,$$

$$u_0(x, 0) = \varphi(x), \quad u_{0t}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega,$$

имеет единственное решение, принадлежащее пространству V (см. [15]). Покажем, что для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ выполняются указанные выше включения.

Пусть выполняется $\beta < 0$. Для чисел a_k и b_k при $k \geq k_0$ имеют место представления

$$a_k = \frac{1}{d_k} [-A_k(E_{k,1} - E_{k,2}) + B_k(D_{k,1} - D_{k,2})],$$

$$b_k = \frac{1}{d_k} [-B_k(z_{k,1}D_{k,2} - z_{k,2}D_{k,1}) + A_k(z_{k,1}E_{k,2} - z_{k,2}E_{k,1})].$$

Учитывая свойства чисел $z_{k,1}$ и $z_{k,2}$, а также используя оценку утверждения 1 для чисел d_k , нетрудно получить оценки

$$|a_k| \leq C_1 |\lambda_k|^2 \left(\int_0^T v_k^2(t) dt \right)^{1/2}, \quad (19)$$

$$|b_k| \leq C_2 |\lambda_k|^3 \left(\int_0^T v_k^2(t) dt \right)^{1/2} \quad (20)$$

с постоянными C_1 и C_2 , определяющимися лишь функциями $N_1(t)$ и $N_2(t)$, числами α , β и T . Из этих оценок следуют неравенства

$$|\lambda_k|^2 a_k^2 \leq C_1 |\lambda_k|^6 \int_0^T v_k^2(t) dt, \quad |\lambda_k| b_k^2 \leq C_2 |\lambda_k|^7 \int_0^T v_k^2(t) dt.$$

Поскольку для функции $v_0(x, t)$ выполняется включение $\Delta^4 v_0(x, t) \in L_2(Q)$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^8 \int_0^T v_k^2(t) dt$$

сходится. Но тогда и ряды $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 a_k^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| b_k^2$ сходятся. А это и означает,

что функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, функция $\psi(x)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Как говорилось выше, из принадлежности функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ пространствам $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ следует, что функция $u_0(x, t)$ корректно определена и принадлежит пространству V . Определим функцию $u(x, t)$:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + v_0(x, t). \quad (21)$$

Очевидно, что эта функция и будет представлять собой искомое решение нелокальной задачи (1)–(4).

Пусть теперь выполняется $\beta > 0$. В этом случае также выполняются оценки (19) и (20), но, быть может, с иными постоянными C_1 и C_2 . Повторяя далее приведенные выше рассуждения, нетрудно получить, что и в случае $\beta > 0$ равенство (21) будет определять искомое решение нелокальной задачи (1)–(4).

Единственность решений начальной задачи (1)–(4) доказана в теореме 1.

Теорема полностью доказана.

Условия теоремы 2 предполагают непосредственную проверку выполнения условий (8) для чисел $k = 1, \dots, k_0 - 1$ или $k = 1, \dots, k_0^* - 1$. И хотя числа k_0 или k_0^* находятся конструктивно, проверка этих условий при большой величине чисел k_0 или k_0^* может быть затруднительной. Следующий результат не требует проверки выполнения условий (8).

Теорема 3. Пусть $\alpha < 0$, $\beta \neq 0$, функции $N_1(t)$ и $N_2(t)$ линейно независимы на отрезке $[0, T]$, выполняются условия (10) и (11), а также условие

$$|\lambda_1| > \max \left(\frac{2}{|\alpha|} \left(\frac{d_{0,2}}{d_{0,1}} \right)^{1/m}, \frac{4|\beta|}{\alpha^2} \right), \quad \text{если } \beta < 0, \\ |\lambda_1| > \frac{2}{|\alpha|} \left(\frac{d_{0,2}^*}{d_{0,1}^*} \right)^{1/m}, \quad \text{если } \beta > 0. \quad (22)$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(0, T; W_2^6(\Omega))$, $f(x, t) = \Delta f(x, t) = \Delta^2 f(x, t) = 0$ при $(x, t) \in S$, нелокальная задача (1)–(4) имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V , и притом ровно одно.

Доказательство. Прежде всего заметим, что как в случае $\beta < 0$, так и в случае $\beta > 0$ число k_1 равно 1. Далее, из условия (22) следует, что при $\beta < 0$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\alpha \lambda_1}{2} \right|^m > \frac{d_{0,2}}{d_{0,1}}, \quad (23)$$

и при $\beta > 0$ соответственно неравенство

$$\left| \frac{\alpha \lambda_1}{2} \right|^m > \frac{d_{0,2}^*}{d_{0,1}^*}. \quad (24)$$

Поскольку для всех натуральных чисел k имеет место неравенство

$$|z_{k,2}| \geq \frac{|\alpha \lambda_1|}{2}, \quad (25)$$

из (23)–(25) вытекает, что для всех k справедливы неравенства утверждений 1 и 2. Но тогда, во-первых, выполняются условия (7) и (8), во-вторых, истинны все рассуждения и выкладки теоремы 2. А это, в свою очередь, означает, что истинно и заключение теоремы 2.

2. Замечания и дополнения

1. В целом аналогичные результаты можно получить для уравнений

$$u_{tt} + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) Au = f(x, t)$$

с линейным эллиптическим оператором A самосопряженного вида (с естественным добавлением граничных условий, если порядок оператора A будет больше 2).

2. Если для некоторых натуральных чисел k будет выполняться $z_{k,1} = z_{k,2}$, то условия теоремы единственности незначительно изменятся. Именно, нужно лишь учесть тот факт, что при наличии кратных корней представление функций $\varphi_k(t)$, использованное при доказательстве теоремы 1, должно быть иным. Что касается теоремы 2 существования, то здесь также нужно лишь учесть изменение в условии (8), асимптотика же чисел a_k и b_k , а также вывод о принадлежности функции $u_0(x, t)$ пространству V не изменятся, поскольку изменение конечного числа слагаемых не влияет на сходимость ряда.

3. Случай $\beta = 0$ в уравнении (1) очевидным образом приводит к тому, что нелокальная задача (1)–(4) распадается на две независимые задачи — на задачу нахождения решения $w(x, t)$ уравнения теплопроводности при наличии интегрального условия, и на задачу нахождения функции $u(x, t)$, являющейся решением уравнения $u_t = w$ и такой, что для нее выполняется второе интегральное условие. Первая из этих задач исследована в работе [15], вторая изучается непосредственно.

4. Условие (11) подразумевает, что в случае $m = 1$ функция $N_2(t)$ должна быть неотрицательной и должно выполняться условие $N_2(0) = 0$. Покажем, что эти условия можно изменить.

Пусть выполняется условие (10) и в дополнение к нему выполняется условие

$$N_1(t) \in C^1([0, T]).$$

Далее, пусть выполняются условия:

функции $N_1(t)$ и $N_2(t)$ линейно независимы на отрезке $[0, T]$;

$$N_2(0) > 0, \quad N_2(t) - \gamma_0 N_1(t) \geq 0 \quad \text{для} \quad t \in [0, T], \quad \gamma_0 = \frac{N_2(0)}{N_1(0)}.$$

Положим $\tilde{N}_2(t) = N_2(t) - \gamma_0 N_1(t)$ и рассмотрим нелокальную задачу (1)–(4) с функциями $N_1(t)$ и $\tilde{N}_2(t)$. Поскольку для функции $\tilde{N}_2(t)$ выполняется условие (11) (для $m = 1$), будет иметь место разрешимость этой задачи в пространстве V . Очевидно далее, что для решения этой задачи будет выполняться условие (4), т. е. решение нелокальной задачи с функциями $N_1(t)$ и $\tilde{N}_2(t)$ будет решением исходной нелокальной задачи.

5. Условие (22) теоремы 3 фактически представляет условие на меру пространственной области Ω , поскольку именно мера Ω определяет величину первого собственного числа оператора Лапласа.

6. Случай $\alpha > 0$ в уравнении (1) очевидным образом сводится к рассмотренному в работе случаю заменой $\tau = T - t$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Demidenko G. V., Uspenskii S. V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to highest order derivatives. New York: Marcel Dekker Inc., 2003.
2. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
3. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
4. Ларькин Н. А. Теоремы существования для квазилинейных псевдогиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, № 6. С. 1316–1319.
5. Liu Y., Li H. H^1 -Galerkin mixed finite element methods for pseudo-hyperbolic equations // Appl. Math. Comput. 2009. V. 212, N 2. P. 446–457.
6. Попов Н. С. О разрешимости краевых задач для многомерных псевдогиперболических уравнений с нелокальными граничными условиями интегрального вида // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 2. С. 69–80.
7. Сафиуллова Р. Р. Краевая задача с интегральными условиями для дифференциального уравнения третьего порядка. Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, вып. 1. С. 85–101.
8. Кожанов А. И., Дюжева А. В. Нелокальные задачи с интегральным условием для дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. № 4. (в печати)
9. Kozhanov A. I. Nonlocal problems with integral conditions for elliptic equations // Complex Variables and Elliptic Equ. 2019. V. 64, N 5. P. 741–752.
10. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
11. Triebel H. Interpolation theory, function spaces, differential operators. Berlin: VEB Deutscher Verl. Wissenschaften, 1978.
12. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
13. Эванс Л. К. Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003.
14. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004.
15. Кожанов А. И. Разрешимость краевых задач для линейных параболических уравнений в случае задания интегрального по временной переменной условия // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 4. С. 20–30.

Поступила в редакцию 12 ноября 2020 г.

После доработки 12 ноября 2020 г.

Принята к публикации 29 ноября 2020 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsu.ru

Дюжева Александра Владимировна
Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара 443100
aduzheva@rambler.ru

SOLVABILITY OF A NONLOCAL PROBLEM
WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR
THIRD-ORDER SOBOLEV-TYPE EQUATIONS

A. I. Kozhanov and A. V. Dyuzheva

Abstract: We study solvability of a nonlocal problem with integral conditions for Sobolev-type differential equations of the third order. Using spectral decompositions, we prove existence and uniqueness theorems for solutions with all generalized S. L. Sobolev derivatives entering the equation.

DOI: 10.25587/SVFU.2020.80.43.003

Keywords: Sobolev-type differential equation, problem with integral conditions, regular solution, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Demidenko G. V. and Uspenskii S. V., Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to Highest Order Derivatives. Marcel Dekker, New York (2003).
2. Sveshnikov A. G., Al'shin A. B., Korpusov M. O., and Pletner Yu. D., Linear and Nonlinear Sobolev-Type Equations [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2007).
3. Kozhanov A. I., Composite Type Equations and Inverse Problems, VSP, Utrecht (1999).
4. Lar'kin N. A., "Existence theorems for quasi-linear pseudo-hyperbolic equations [in Russian]," Dokl. Akad. Nauk SSSR, **265**, No. 6, 1316–1319 (1982).
5. Liu Y. and Li H., " H^1 -Galerkin mixed finite element methods for pseudo-hyperbolic equations," Appl. Math. Comput., **212**, No. 2, 446–457 (2009).
6. Popov N. S., "On solvability of boundary value problems for multidimensional pseudo-hyperbolic equations with non-local boundary conditions of integral type [in Russian]," Mat. Zametki SVFU, **21**, No. 2, 69–80 (2014).
7. Safiullova R. R., "A boundary value problem with integral conditions for a third-order differential equation [in Russian]," Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat., Mekh., Inform., **7**, No. 1, 85–101 (2007).
8. Kozhanov A. I. and Dyuzheva A. A., "Non-local problems with integral condition for third-order differential equations [in Russian]," Vestn. Samar. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, No. 4 (in the press) (2020).
9. Kozhanov A. I., "Nonlocal problems with integral conditions for elliptic equations," Complex Variables Elliptic Equ., **64**, No. 5, 741–752 (2019).
10. Ladyzhenskaya O. A. and Ural'tseva N. N., Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Acad. Press, New York; London (1987).
11. Triebel H., Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, VEB Deutscher Verl. Wissenschaften, Berlin (1978).
12. Sobolev S. L., Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1991).
13. Evans L. C., Partial Differential Equations, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1998).
14. Sveshnikov A. G., Bogolyubov A. N., and Kravtsov V. V., Lectures on Mathematical Physics [in Russian], Mosk. Gos. Univ., Moscow (2004).

15. Kozhanov A. I., “Solvability of boundary value problems for linear parabolic equations in case of integral in the time variable condition [in Russian],” *Mat. Zametki SVFU*, **21**, No. 4, 20–30 (2014).

Submitted November 12, 2020

Revised November 12, 2020

Accepted November 29, 2020

Aleksandr I. Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, Novosibirsk 630090, Russia
`kozhanov@math.nsc.ru`

Alexandra V. Dyuzheva
Samara State Technical University,
244 Molodogvardeyskaya Street, Samara 443100, Russia
`aduzheva@rambler.ru`