

УДК 517.53+517.946

УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА НА ПЛОСКОСТИ С СИЛЬНОЙ СТЕПЕННОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ

А. Б. Расулов, Т. В. Капицына

Аннотация. В ограниченной области на плоскости рассматривается одно эллиптическое уравнение второго порядка, главным оператором которого является оператор Лапласа с сильной полярной особенностью в младшем коэффициенте. Изучены вопросы построения интегрального представления общего решения, а также их применение к исследованию краевых задач.

DOI: 10.25587/2411-9326-2026-1-27-37

Ключевые слова: уравнение Лапласа, оператор Лапласа с сильной полярной особенностью, задача Дирихле.

Введение

Уравнения Лапласа с сингулярными коэффициентами в младших членах — это особый класс эллиптических уравнений, коэффициенты или правые части которых могут быть разрывными или даже бесконечными в определенных точках. Это усложняет их исследование. Такие уравнения встречаются в физике при описании неоднородных сред, например, при моделировании распространения волн в материалах с дефектами.

В работе Н. Р. Раджабова [1] найдены интегральные представления для некоторых классов дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярными гиперплоскостями через решения уравнений с регулярными коэффициентами. Более подробную информацию по эллиптическим уравнениям с сингулярными коэффициентами можно найти в [2].

Пусть область D содержит начало координат, ограничена границей $\Gamma \in C^{1,\mu}$, $0 < \mu < 1$, ориентированной против часовой стрелки. В дальнейшем $D_0 = D \setminus \{0\}$, $D' = \mathbb{C} \setminus (D \cup \Gamma)$.

Настоящая работа посвящена построению интегрального представления общего решения одного эллиптического уравнения второго порядка, главным оператором которого является оператор Лапласа уравнения Лапласа в ограниченной области D на плоскости с сильной полярной особенностью в младшем коэффициенте. Полученные интегральные представления применяются к исследованию краевых задач.

В стандартных обозначениях $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $2\partial_z = \partial_x - i\partial_y$, $4\partial_z\partial_{\bar{z}} = \Delta$, $u = u_1 + iu_2$ в области D_0 рассмотрим следующее сингулярное уравнение Лапласа с сильной особенностью в младшем коэффициенте:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} - \left(\frac{a}{\rho} + A \right) \frac{\partial u}{\partial z} = f, \quad (1)$$

причем $a \in \mathbb{C}$, $A(z), f(z) \in L_p(D)$, $p > 2$. Для краткости обозначим

$$\rho(z) = \bar{z}|z|^{n-1}, \quad n > 1.$$

Для уточнения класса решений уравнения (1) напомним некоторые известные факты из теории эллиптических систем, изложенные в [3, 4].

Заметим, что функция f принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(D_0)$, если в любой подобласти $G_0 \subset D_0$ сама функция f и ее обобщенные производные $f_z, f_{\bar{z}}$ принадлежат $L^p_{\text{loc}}(G_0)$, $p > 2$.

Пусть в некотором открытом множестве G на плоскости задана линейная эллиптическая система первого порядка с постоянными старшими коэффициентами, младшие коэффициенты и правая часть которой принадлежат $L^p_{\text{loc}}(G)$, т. е. принадлежат $W^{1,p}(G_0)$ в любой ограниченной области G_0 , лежащей в G вместе со своей границей. Тогда на основании внутренней регулярности (см. [1]) любое слабое решение u этого уравнения регулярно в том смысле, что оно принадлежит классу $W^{1,p}_{\text{loc}}(G)$ и удовлетворяет рассматриваемой системе. В силу теоремы вложения функция u в действительности принадлежит классу $C^\mu(\bar{G}_0)$ с показателем $\mu \leq (p-2)/p$. Этот факт был доказан в [3]. В соответствии с внутренней регулярностью решений в дальнейшем решение линейной эллиптической системы первого порядка предполагается регулярным в открытом множестве D_0 .

Так как уравнение (1) сводится к интегрированию двух эллиптических уравнений первого порядка в соответствии с внутренней регулярностью решений в дальнейшем обобщенное решение уравнения (1) предполагается регулярным в открытом множестве D_0 .

Более точно, функцию $u(z) \in W^{1,p}_{\text{loc}}(D_0)$, где $p > 2$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду, называем *регулярным решением*.

1. Интегральные представления решений в конечной области

Введем операторы Помпейю — Векуа [3, с. 29]

$$(T\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d_2\zeta, \quad (2)$$

где $d_2\zeta$ — элемент площади.

Хорошо известно, что при $p > 2$ этот оператор действует $L^p(D) \rightarrow W^{1,p}(D) \subseteq H(\bar{D})$ и удовлетворяет уравнению

$$(T\varphi)_{\bar{z}} = \varphi, \quad (2')$$

а также

$$(\overline{T}f)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta)}{\overline{\zeta} - \overline{z}} d_2\zeta \quad (3)$$

с плотностью $f \in L^p(D)$, $p > 2$. В частности, оператор $\overline{T}$ также компактен в пространствах $L^p(D)$ и $C(\overline{D})$ и

$$((\overline{T}f))_z = f. \quad (3')$$

В обозначениях

$$\omega(z) = \frac{2a}{(n-1)|z|^{n-1}}, \quad h(z) = (TA)(z) + \frac{a}{(n-1)\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{|\zeta|^{n-1}(\zeta - z)} \quad (4)$$

(где $a \in \mathbb{C}$ — комплексное число) о представлении решения уравнения (1) справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $a \in \mathbb{C}$ — комплексное число и $A(z) \in L^p(D)$, $p > 2$. Тогда

1) если $\operatorname{Re} a \leq 0$, то при $e^{-\omega}f \in L^p(D)$, $p > 2$, любое регулярное решение уравнения (1) в области D_0 задается формулой

$$u = \overline{\psi} + \overline{T}e^{\omega+h}\phi + \overline{T}e^{\omega+h}Te^{-\omega-h}f, \quad (5)$$

где $\overline{\psi}$ — антианалитическая функция, функция ϕ аналитична в области D_0 , причем $\phi \in L^p(D)$, $p > 2$; функции ψ и ϕ определяются однозначно по функции u и ее производной u_z ;

2) если $\operatorname{Re} a > 0$, то любое регулярное решение однородного уравнения (1) представимо в виде

$$u = \overline{\psi},$$

где $\overline{\psi}$ — аналитическая функция в области D_0 , а неоднородное уравнение неразрешимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (1) сводится к интегрированию двух уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} U_{\overline{z}} - \left(\frac{a}{\rho} + A\right)U = f, \\ u_z = U. \end{cases} \quad (6)$$

Положим

$$\Omega = \frac{2a}{(n-1)|z|^{n-1}} + h(z). \quad (7)$$

Лемма 1. Пусть функция $\Omega(z)$ определена формулой (7) и $e^{-\Omega}f \in L^p(D)$, $p > 2$. Тогда общее решение первого уравнения системы (6) в классе $C(\overline{D} \setminus 0)$ задается формулой

$$U = e^{\Omega}[\phi + T(e^{-\Omega}f)], \quad (8)$$

где функция $\phi \in C(\overline{D} \setminus 0)$ аналитична в открытом множестве $D \setminus 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве леммы 1 существенную роль играет следующее

Утверждение. Пусть в первом уравнении системы (6) коэффициент A принадлежит $L^p(D)$, $p > 2$. Тогда функция Ω удовлетворяет уравнению

$$\Omega_{\bar{z}} = \frac{a}{\rho} + A. \quad (9)$$

Действительно, поскольку

$$2 \frac{\partial |z|}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{|z|},$$

имеем равенство

$$\frac{2a}{n-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{|z|^{n-1}} \right) = \frac{a}{\rho}.$$

Кроме того, согласно свойству (2') оператора Помпейю — Векуа получим

$$(TA)_{\bar{z}} = A.$$

С учетом этих соображений функция Ω удовлетворяет уравнению (9).

Теперь приведем доказательство утверждения, основанное на формуле Грина. В этом случае коэффициент первого уравнения из (6) принимает вид

$$\frac{za}{|z|^{n+1}} + A(z), \quad n > 1, \quad \text{где } A(z) \in L_p(D), \quad p > 2.$$

Так как согласно (2')

$$(TA)_{\bar{z}} = A,$$

достаточно показать справедливость формулы (9) для первого слагаемого.

В обозначении

$$\Omega(z) = a\Omega_1(z) + (TA)(z)$$

покажем, что

$$\Omega_1(z) = \frac{2}{(n-1)|z|^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{|\zeta|^{n-1}(\zeta - z)}.$$

Введем сингулярный интеграл

$$\Omega_1(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega_{1\varepsilon}(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(T_{\varepsilon} \frac{\zeta}{|\zeta|^{n+1}} \right) (z) \equiv - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a}{\pi} \int_{D_{\varepsilon}} \frac{\zeta}{|\zeta|^{n+1}(\zeta - z)} d_2\zeta,$$

где интегральный оператор T_{ε} определяется аналогично (4) по отношению к области D_{ε} .

Так как $a \in \mathbb{C}$ — комплексное число, дальше мы его опускаем.

Покажем, что функция $\Omega_1(z)$ представима в виде (7) и в области $\{z \in D, z \neq 0\}$ является решением уравнения

$$\partial_{\bar{z}}\Omega_1 = \frac{z}{|z|^{n+1}}.$$

С этой целью воспользуемся тождеством

$$-\frac{2}{(n-1)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{1}{|\zeta|^{n-1}} \right) = \frac{\zeta}{|\zeta|^{n+1}},$$

согласно которому

$$\frac{1}{\pi} \int_{D_\varepsilon} \frac{\zeta}{|\zeta|^{n+1}} \frac{d_2 \zeta}{\zeta - z} = - \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \frac{2}{(n-1)\pi} \int_{D_\varepsilon \cap \{|\zeta - z| \geq \delta_1\}} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left[\frac{1}{|\zeta|^{n-1}} \frac{1}{\zeta - z} \right] d_2 \zeta. \quad (10)$$

В силу формулы Грина

$$\int_D \partial_{\bar{z}} U \, dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial D} U \, dz$$

имеем

$$\begin{aligned} & - \frac{2}{(n-1)\pi} \int_{D_\varepsilon \cap \{|\zeta - z| \geq \delta_1\}} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left[\frac{1}{|\zeta|^{n-1}} \frac{1}{\zeta - z} \right] d_2 \zeta \\ & = \frac{2i}{(n-1)2\pi} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{1}{|\zeta|^{n-1}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta - \frac{2i}{(n-1)2\pi} \int_{|\zeta - z| = \delta_1} \frac{1}{|\zeta|^{n-1}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta, \end{aligned}$$

где последний интеграл берется против часовой стрелки. Поскольку в обозначениях (7)

$$- \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \frac{2i}{(n-1)2\pi} \int_{|\zeta - z| = \delta_1} \frac{1}{|\zeta|^{n-1}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \frac{2}{(n-1)|z|^{n-1}},$$

в (10) можем перейти к пределу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{D_\varepsilon} \frac{\zeta}{|\zeta|^{n+1}} \frac{1}{\zeta - z} d_2 \zeta & = \frac{i}{(n-1)\pi} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{1}{|\zeta|^{n-1}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta + \frac{2}{(n-1)|z|^{n-1}} \\ & = \frac{1}{(n-1)\pi i \varepsilon^{n-1}} \int_{|\zeta| = \varepsilon} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{(n-1)\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{|\zeta|^{n-1}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta + \frac{2}{(n-1)|z|^{n-1}}. \end{aligned}$$

По теореме Коши при $\varepsilon < |z|$ первый интеграл равен нулю, так что

$$\begin{aligned} \Omega_1(z) & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega_{1\varepsilon}(z) = - \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_\varepsilon} \frac{\zeta}{|\zeta|^{n+1}} \frac{1}{\zeta - z} d_2 \zeta \\ & = \frac{2}{(n-1)|z|^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{|\zeta|^{n-1}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta, \end{aligned}$$

откуда вытекает справедливость формулы (7).

Переходим к непосредственному доказательству леммы 1. Легко проверить, что $U = e^\Omega$ удовлетворяет однородной части уравнения

$$U_{\bar{z}} - \left(\frac{a}{\rho} + A \right) U = f.$$

Тогда для функции $V = e^{-\Omega} U$ имеем соотношение

$$V_{\bar{z}} = e^{-\Omega} U_{\bar{z}} - (A) e^{-\Omega} U = e^{-\Omega} f.$$

Из этой формулы с помощью оператора T получим $V = \phi + T(e^{-\Omega}f)$, где функция $\phi \in C(\overline{D} \setminus 0)$ аналитична в открытом множестве $D \setminus 0$. В результате приходим к представлению (8). Лемма 1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1.

Рассмотрим вопрос интегрирования уравнения первого порядка вида

$$u_z = U.$$

В получении общего решения данного уравнения и в его описании существенную роль играет интегральный оператор (3) Помпейю — Векуа. Следовательно, общее решение этого уравнения задается формулой [3, с. 29]

$$u = \overline{\psi} + \overline{T}U \quad (11)$$

с произвольной в D антианалитической функцией $\overline{\psi}$. Подставляя значение $U(z)$ из формулы (8), в формуле (10) получим интегральное представление (5).

Найдем формулу обращения полученного интегрального представления. Из формулы (8) в случае $\operatorname{Re} a \leq 0$ с учетом $u_z = U$, а также из формулы (10) получим

$$\begin{cases} \phi = e^{\Omega}u_z - T(e^{-\Omega}f), \\ \psi = \overline{u} - \overline{T}u_z. \end{cases} \quad (12)$$

В случае $\operatorname{Re} a < 0$

$$\psi = \overline{u}.$$

Теорема 1 доказана.

Напомним, функция $\overline{\psi}(z)$, определенная на открытом подмножестве G_0 области D комплексной плоскости, называется *антианалитической*, если

$$\frac{d\overline{\psi}}{dz} = 0.$$

Функция $\psi(z) = \psi_1(x, y) + i\psi_2(x, y)$ голоморфна в области D тогда и только тогда, когда функция $\overline{\psi}(z) = \psi_1(x, y) - i\psi_2(x, y)$ антиголоморфна в области D .

Эти свойства антианалитической функции мы используем при решения краевых задач.

2. Интегральные представления решений в неограниченной области

В этом случае интегральный оператор Помпейю — Векуа T понимается по отношению к неограниченной области $D' = \mathbb{C} \setminus (D \cup \Gamma)$. Если граница области Γ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\Gamma)$, то согласно теореме Келлога [5] рассматриваемая область D отображается на единичный круг и ее внешность на внешность единичного круга. Поэтому для наглядности исследование ведем в основном в областях $\mathbb{T} = \{z : |z| \leq 1\}$ и $\mathbb{T}' = \{z : |z| \geq 1\}$.

Хорошо известно [3], что если функция φ непрерывно дифференцируема и $\varphi(z) = O(|z|^\delta)$ при $z \rightarrow \infty$ с некоторым $\delta < -1$, то функция

$$(T\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d_2\zeta, \quad \zeta, z \in \mathbb{C}, \quad (13)$$

непрерывно дифференцируема и является решением уравнения

$$(T\varphi)_{\bar{z}} = \varphi.$$

Если $\varphi \in L^p(\mathbb{C}) \cap L^q(\mathbb{C})$, где $1 < q < 2 < p$, то, применяя неравенство Гёльдера к подынтегральному выражению в областях $\mathbb{T}$ и $\mathbb{T}'$, убеждаемся, что интеграл (13) существует и справедлива оценка

$$|T\varphi|_{0,\mathbb{C}} \leq M(|\varphi|_{L^p} + |\varphi|_{L^q}), \quad (14)$$

где постоянная M зависит только от p и q .

Здесь и ниже $|\varphi|_{0,G}$ означает суп-норму функции φ , заданной в некоторой области G .

Функции $\varphi \in C^\mu(\mathbb{C})$ могут осциллировать на бесконечности, оставаясь ограниченными. В противоположность этому обозначим через $C_*^\mu(\mathbb{C})$ пространство функций φ , которые вместе с $\varphi(1/z)$ принадлежат $C^\mu(\mathbb{T})$ в единичном круге $\mathbb{T} = \{|z| \leq 1\}$ (разумеется, при дополнительном требовании непрерывности φ в точках единичной окружности). Очевидно, эти функции имеют предел $\varphi(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z)$ на бесконечности и $\varphi(z) - \varphi(\infty) = O(|z|^{-\mu})$ при $z \rightarrow \infty$.

В монографии [3] И. Н. Векуа описал условие на функцию f , обеспечивающее принадлежность Tf классу $C^\mu(\mathbb{C})$ в терминах введенного им пространства $L^{p,\nu}(\mathbb{C})$, где $p > 2$. Под $C^\mu(\mathbb{C})$ здесь понимается класс непрерывных функций $f(z)$, которые вместе с $f(1/z)$ принадлежат $C^\mu(B)$ в единичном круге $\mathbb{T} = \{z : |z| \leq 1\}$. По определению пространство $L^{p,\nu}(\mathbb{C})$ состоит из всех функций f , для которых $f(z)$ и $f_\nu(z) = |z|^{-\nu} f(1/z)$ принадлежат $L^p(\mathbb{T})$.

Для $\varphi \in L^{p,2}$ функция $T\varphi$ принадлежит классу $C^\mu(\mathbb{C})$ и обращается в нуль на бесконечности. В действительности имеет место следующий результат (см. теоремы 1.24, 1.25 в монографии [3]).

Теорема 2. Оператор $T : L^{p,2} \rightarrow C_*^\mu$, $\mu = 1 - 2/p$, ограничен. В частности, $(T\varphi)(z) = O(|z|^{-\mu})$ для $\varphi \in L^{p,2}$ при $z \rightarrow \infty$ и $(T\varphi)(z) = O(|z|^{-1-\mu})$ при $z \rightarrow \infty$ для $\varphi \in L^{p,3}$.

На основе теоремы 2, рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Пусть $a \in \mathbb{C}$ — комплексное число и $A(z) \in L^{p,2}(D')$, $p > 2$. Тогда

1) если $\operatorname{Re} a \leq 0$, то при $e^{-\omega} f \in L^{p,3}(D')$, $p > 2$, любое регулярное обращающееся в нуль на бесконечности решение уравнения (1) в области D' задается формулой

$$u = \bar{\psi} + \bar{T}e^{\omega+h}\phi + \bar{T}e^{\omega+h}Te^{-\omega-h}f, \quad (15)$$

где $\bar{\psi}$ — антианалитическая функция такая, что

$$\bar{\psi}(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad (16)$$

и функция ϕ аналитична в области D' , причем $\phi \in L^{p,2}(D')$, $p > 2$; функции ψ и ϕ определяются однозначно по функции u и ее производной u_z ;

2) если $\operatorname{Re} a > 0$, то любое регулярное обращающееся в нуль на бесконечности решение однородного уравнения (1) представимо в виде

$$u = \bar{\psi},$$

где $\bar{\psi}$ — антианалитическая функция в области D' , поведение которой на бесконечности определяется как в формуле (16), а неоднородное уравнение неразрешимо.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как следует из поведения $(Tf)(z) = o(|z|^{\mu-1})$ при $z \rightarrow \infty$, условие

$$u(z) = O\left(\frac{1}{|z|^\mu}\right)$$

при $z \rightarrow \infty$ равносильно тому, что в этом представлении функция ψ в $z = \infty$ обращается в нуль и, следовательно, аналитична во всей области D' .

Интегральное представление (15) также остается ограниченным при $z \rightarrow \infty$, если дополнительно к (16) еще выполнены следующие условия:

$$e^{-\omega} f = O\left(\frac{1}{|z|^\alpha}\right), \quad \alpha > 2, \quad e^\omega \phi = O\left(\frac{1}{|z|^\beta}\right), \quad \beta > 1.$$

Кроме этого, если простой контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, то по теореме Келлога конформно можно отобразить на эту область единичный круг $\mathbb{D} = \{z : |z| \leq 1\}$. Поэтому при исследовании краевых задач ограничимся случаем, когда область является единичным кругом и при этом $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$.

3. Краевые задачи

Задача D. Найти решение $u(z) \in C(\bar{D})$ уравнения (1), удовлетворяющее на контуре Γ граничным условиям

$$\begin{cases} \operatorname{Re} e^\Omega u_z(t) = g_1(t), & t \in \Gamma, \\ \operatorname{Re} \bar{u}(t) = g_2(t), & t \in \Gamma, \\ u(z_0) = 0, \quad u_{\bar{z}}(z_0) = 0, & z_0 \in D, \end{cases} \quad (17)$$

где $g_k(t) \in C(\Gamma)$, $k = 1, 2$, — заданные функции, z_0 — произвольная фиксированная точка области D .

РЕШЕНИЕ. На основе формулы (8) с учетом $U = u_z$, используя первое условие задачи D, приходим к новой формулировке: требуется найти решение первого уравнения (6) из класса $U \in C(\bar{D})$ в виде (8), в котором произвольная функция $\phi(z)$ удовлетворяет на контуре Γ граничному условию

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \phi|_\Gamma = \tilde{g}_1(t), \\ \operatorname{Im} \phi(z_0) = 0, & z_0 \in D_0, \end{cases} \quad (18)$$

где $\tilde{g}_1 = g_1 - \operatorname{Re} T e^{\omega} f$ и $\tilde{g}_1(t) \in C^\nu(\Gamma)$, $\nu < 1 - 2/p$, $p > 2$.

Точное решение (18) представимо в виде [6, с. 124]

$$\phi = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \bar{g}_1(\zeta) d\zeta + i c_0, \quad (19)$$

где

$$c_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Im}(\zeta z_0)}{|\zeta - z_0|^2} \bar{g}_1(\zeta) d\zeta.$$

Подставляя значение ϕ из формулы (19) в (5), а также используя второе условие из (17), т. е.

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \bar{u}(t) = g_2(t), & t \in \Gamma, \\ u(z_0) = 0, & z_0 \in D, \end{cases} \quad (20)$$

приходим к следующей краевой задаче для нахождения неизвестной аналитической функции $\psi(z)$: требуется найти произвольную аналитическую функцию $\psi(z)$, которая удовлетворяет на контуре Γ граничному условию

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \psi|_{\Gamma} = \tilde{g}_2(t), \\ \operatorname{Im} \psi(z_0) = 0, & z_0 \in D_0, \end{cases} \quad (21)$$

где $\tilde{g}_2 = \bar{g}_2 + f_1(\tilde{g}_1)$,

$$f_1(\tilde{g}_1) = -\operatorname{Re} \{ \overline{T e^{\omega+h} \phi(\tilde{g}_1)} + \overline{T e^{\omega+h} T e^{-\omega-h} f} \}$$

и $\tilde{g}_2(t) \in C^\nu(\Gamma)$, $\nu < 1 - 2/p$, $p > 2$.

Точное решение задачи (21) представимо в виде [6, с. 124]

$$\psi = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \bar{g}_2(\zeta) d\zeta + i c_1,$$

где

$$c_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Im}(\zeta z_0)}{|\zeta - z_0|^2} \tilde{g}_2(\zeta) d\zeta.$$

В результате приходим к решению исходной краевой задачи D.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1, в частности, $\operatorname{Re} a \leq 0$ и $g_k(t) \in H(\Gamma)$, $k = 1, 2$. Тогда задача D в классе $u(z) \in C(\bar{D})$ имеет единственное решение

$$u = I_0(g_2)(z) + \overline{T e^{\omega+h}} I_0(g_1) + \overline{T e^{\omega+h} T e^{-\omega-h} f},$$

где

$$I_0(g_k)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{\zeta + z}{\zeta - z} - \frac{2i \operatorname{Im}(\zeta z_0)}{|\zeta - z_0|^2} \right] \tilde{g}_k(\zeta) d\zeta, \quad k = 1, 2,$$

и $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$ соответственно выражаются формулами, приведенными в (19) и (21).

Полученное выше интегральное представление дает возможность изучить некоторые физические задачи [7], а также ставить и исследовать другие краевые задачи.

Например, задача типа линейного сопряжения ставится следующим образом: найти регулярное решение уравнения (1) в классе

$$u, e^{-\omega} u_{\bar{z}} \in C^{\mu}(\overline{D}), \quad 0 < \mu < 1 - 2/p,$$

по краевым условиям

$$(u_z)^+(t) - G_1(t)(u_z)^-(t) = g_1(t),$$

$$u^+(t) - G_2(t)u^-(t) = g_2, \quad t \in \Gamma,$$

где знаки «+» и «-» указывают на граничные значения со стороны D и D' .

Эту задачу рассмотрим при следующих требованиях на ее данные:

1) функции G_k , g_k принадлежат $C^{\nu}(\Gamma)$, $k = 1, 2$, причем G_1 и G_2 всюду отличны от нуля;

2) правые части краевых условий $g_k(t)$ принадлежат $H(\Gamma)$, $k = 1, 2$.

На основе формулы обращения (11) эта задача сводится к задаче линейного сопряжения теории аналитических функций, решение которой можно найти в монографиях [8, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Раджабов Н. Р. Интегральные представления для некоторых классов дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярными гиперплоскостями через решение уравнений с регулярными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233, № 5. С. 796–799.
2. Radjabov N. An introduction to the theory of partial differential equations with super-singular coefficients. Tehran: Tehran Univ. Publ., 1996.
3. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
4. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
5. Goluzin G. M. Geometric theory of functions of a complex variable. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1969.
6. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.
7. Качалов В. И. Гладкость по вязкости решений операторных уравнений типа Навье — Стокса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2019. Т. 59, № 1. С. 128–134.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 12 ноября 2025 г.

После доработки 12 декабря 2025 г.

Принята к публикации 3 марта 2026 г.

Расулов Абдурауф Бабаджанович, Капицына Татьяна Владимировна
Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
ул. Красноказарменная, 14, Москва 111250
rasulzoda55@gmail.com, kapitsynatv@mpei.ru

UDC 517.53+517.946

LAPLACE EQUATIONS ON THE PLANE
WITH A STRONG POLAR SINGULARITY
IN THE LOWEST COEFFICIENT

A. B. Rasulov and T. V. Kapitsyna

Abstract: The paper considers a second-order elliptic equation in a bounded plane domain whose principal operator is the Laplace operator with a strong polar singularity in the lowest coefficient. The construction of an integral representation for the general solution is explored, as well as its application to the study of boundary value problems.

DOI: 10.25587/2411-9326-2026-1-27-37

Keywords: Laplace equation, Laplace operator with a strong polar singularity, Dirichlet problem.

REFERENCES

1. Radjabov N. R., “Integral representations for some classes of elliptic differential equations with singular hyperplanes through the solution of equations with regular coefficients [in Russian],” Dokl. Akad. Nauk SSSR, **233**, No. 5, 796–799 (1977).
2. Radjabov N., An Introduction to the Theory of Partial Differential Equations With Super-Singular Coefficients, Tehran Univ. Publ., Tehran (1996).
3. Vekua I. N., Generalized Analytical Functions [in Russian], Nauka, Moscow (1988).
4. Bers L., John F., and Schechter M., Partial Differential Equations [in Russian], Mir, Moscow (1966).
5. Goluzin G. M., Geometric Theory of Functions of Complex Variable, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1969).
6. Bitsadze A. V., Equations of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1982).
7. Kachalov V. I., “Smoothness with respect to viscosity of the solutions of Navier–Stokes-type operator equations [in Russian],” Comput. Math. Math. Phys., **59**, No. 1, 128–134 (2019).
8. Muskhelishvili N. I., Singular Integral Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1968).
9. Gakhov F. D., Boundary Value Problems [in Russian], Nauka, Moscow (1977).

Submitted November 12, 2025

Revised December 12, 2025

Accepted March 3, 2026

Abdurauf B. Rasulov, Tatiana V. Kapitsyna
National Research University ‘MPEI’
14 Krasnokazarmennaya Street, Moscow 111250, Russia
rasulzoda55@gmail.com, kapitsynatv@mpei.ru