Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2021. Том 28, № 4

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

Г. И. Тарасова

Аннотация. Изучается разрешимость в анизотропных пространствах Соболева нелокальных по временной переменной задач для дифференциальных уравнений составного (соболевского) типа

$$u_{tt} + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta\right)\Delta u + \gamma u = f(x,t),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (0,T)$, $0 < T < +\infty$, α, β, γ — заданные действительные числа, $f(x,t)$ — заданная функция. Доказываются теоремы существования и несуществования, единственности и неединственности регулярных решений (решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение).

DOI: 10.25587/SVFU.2021.27.62.007

Ключевые слова: дифференциальные уравнения составного типа, нелокальные задачи, регулярные решения, существование, единственность.

Введение

Нелокальными задачами для дифференциальных уравнений называют задачи, в которых вместо обычных краевых условий задаются условия, связывающие значения решения или (и) его производных в различных точках тех или иных граничных многообразий или же в точках границы и в точках некоторых внутренних многообразий. Подобные задачи достаточно хорошо исследованы для классических эллиптических, параболических и гиперболических уравнений, для уравнений смешанного типа [1–4], для некоторых классов уравнений высокого по выделенной переменной порядка [4–12]. Менее исследованными представляются нелокальные краевые задачи для уравнений составного типа в целом и для уравнений соболевского типа в частности. Восполнить этот пробел (хотя бы в малой степени) и должна настоящая работа. Более точно, настоящая работа посвящена исследованию разрешимости — исследованию существования и несуществования, единственности и неединственности решений нелокальных по временной переменной задач для дифференциальных уравнений соболевского типа следующего вида:

$$u_{tt} + \left(\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta\right)\Delta u + \gamma u = f(x,t),$$

в которых α, β и γ суть заданные действительные числа. Основной целью работы будет описание условий на параметры α, β и γ, а также на параметры нелокальных условий, обеспечивающих существование или несуществование, единственность или неединственность решений нелокальных задач для данных уравнений.

Уточним, что всюду в работе под решением той или иной задачи для дифференциальных уравнений понимается регулярное решение, т. е. решение, имеющее все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующие уравнения.

Все построения и рассуждения будут вестись с использованием пространств Лебега L_p и Соболева W_p^l. Необходимые определения и описания свойств этих пространств можно найти в монографиях [13–15].

Нелокальные задачи для уравнений соболевского типа второго порядка по переменной t

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, \dots, x_n$, Γ — граница Ω. Будем считать, что Γ — бесконечно дифференцируемая поверхность. Далее, пусть Q — цилиндр $\Omega\times(0,T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma\times(0,T)$ — боковая граница Q, $f(x,t)$ — заданная функция, α, β, γ, a и b суть заданные действительные числа.

Нелокальная задача I. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{tt} + \left(\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta\right)\Delta u + \gamma u = f(x,t), \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_n$, и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = au(x,T), \quad x\in\Omega, \tag{3}$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad x\in\Omega. \tag{4}$$

Нелокальная задача II. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условие* (2), *а также условия*

$$u(x,0) = 0, \quad x\in\Omega, \tag{5}$$

$$u_t(x,0) = bu_t(x,T), \quad x\in\Omega. \tag{6}$$

Нелокальная задача III. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условие* (2), *а также условия*

$$u(x,0) = au(x,T), \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

$$u_t(x,0) = bu_t(x,T), \quad x \in \Omega. \tag{8}$$

Обозначим через V_1 линейное пространство

$$V_1 = \big\{v(x,t) : v(x,t) \in L_\infty\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big), \\ v_t(x,t) \in L_2\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big),\ v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\big\}.$$

Снабдим V_1 нормой

$$\|v\|_{V_1} = \big(\|v\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_{tt}\|^2_{L_2(Q)}\big)^{1/2}.$$

Очевидно, что пространство V_1 с этой нормой будет банаховым пространством.

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированная система в $L_2(\Omega)$ собственных функций и соответственно система собственных чисел задачи

$$\Delta w = \lambda w \quad \text{в } \Omega, \quad w|_\Gamma = 0,$$

причем собственные числа λ_k образуют монотонно убывающую последовательность. Существование указанных систем собственных функций и собственных чисел известно (см. [15, 16]); известно также, что функции $w_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, образуют базис в пространстве $L_2(\Omega)$ и все числа λ_k отрицательны, а последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ не имеет конечных предельных точек.

Обозначим через $Y_{1,k}(t)$ и $Y_{2,k}(t)$ фундаментальную систему решений дифференциального уравнения

$$\varphi''(t) + \alpha\lambda_k\varphi'(t) + (\lambda_k\beta + \gamma)\varphi(t) = 0.$$

Теорема 1. *Пусть*

$$Y'_{1,k}(0)[Y_{2,k}(0) - aY_{2,k}(T)] - Y'_{2,k}(0)[Y_{1,k}(0) - aY_{1,k}(T)] \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Тогда нелокальная задача I *не может иметь в пространстве V_1 более одного решения.*

Доказательство. Решение $u(x,t)$ нелокальной задачи I из пространства V_1 представимо в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty c_k(t)w_k(x),$$

при этом в случае $f(x,t) \equiv 0$ функции $c_k(t)$ являются решениями задачи

$$c''_k(t) + \alpha\lambda_k c'_k(t) + (\lambda_k\beta + \gamma)c_k(t) = 0, \quad c_k(0) = ac_k(T), \quad c'_k(0) = 0.$$

Представляя функции $c_k(t)$ через функции $Y_{1,k}(t)$ и $Y_{2,k}(t)$, учитывая далее граничные условия и условие теоремы, получим $c_k(t) \equiv 0$ при $t \in [0,T]$. Отсюда следует, что $u(x,t)$ — тождественно нулевая в Q функция. Это означает, что нелокальная задача I не может иметь в пространстве V_1 более одного решения.

Теорема доказана.

Аналогичные теоремы единственности имеют место и для локальных задач II и III. Формулировать и доказывать эти теоремы ввиду их очевидности не будем.

Очевидно, что если условие (9) или аналогичные условия единственности для нелокальных задач II и III не выполняются, то нетрудно построить примеры нетривиальных решений однородных задач I–III.

Перейдем к исследованию разрешимости нелокальных задач I–III.

Приведем один вспомогательный результат о разрешимости начально-краевой задачи для уравнения (1).

Рассмотрим задачу: *найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (2), (4), *а также условие*

$$v(x,0)=0, \quad x\in\Omega. \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть α — отрицательное число, и пусть выполняется включение $f(x,t)\in L_2(Q)$. Тогда начально-краевая задача* (1), (2), (10), (4) *имеет решение $v(x,t)$, принадлежащее пространству V_1 и такое, что для него выполняется априорная оценка*

$$\|v\|_{V_1}\le N_0\|f\|_{L_2(Q)} \tag{11}$$

с постоянной N_0, определяющейся лишь числами α, β и γ, областью Ω и числом T.

Доказательство этой теоремы приведено, например, в [9].

Следующая теорема незначительно усиливает результаты работы [9].

Для функций $w(x)$ из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_\Omega w^2(x)\,dx\le c_0\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega w_{x_i}^2(x)\,dx \tag{12}$$

с постоянной c_0, определяющейся лишь областью Ω (см. [13, 14]).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия:*

1) $\alpha<0$, $\beta\le 0$;

2) $\gamma=\gamma_0+\gamma_1$, $\gamma_0\ge 0$, $\beta-c_0\gamma_1\le 0$;

3) $|a|<1$.

Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ нелокальная задача I *имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V_1.*

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — регулярное решение нелокальной задачи I. Умножим уравнение (1) на функцию $u_t(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Используя условия 1–3, а также неравенство (12), нетрудно показать, что выполняется априорная оценка

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q} u_{x_i t}^2\,dxdt+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_i}^2(x,T)\,dx+\int\limits_{\Omega} u_t^2(x,T)\leq N_1\int\limits_{Q} f^2\,dxdt \tag{13}$$

с постоянной N_1, определяющейся лишь числами α, β, γ и c_0. Далее, умножая последовательно уравнение (1) на функции $\Delta u_t(x,t)$ и $u_{tt}(x,t)$, вновь используя условия 1–3, а также оценку (13), получим, что выполняется оценка

$$\|v\|_{V_1}\leq N_1\|f\|_{L_2(Q)}.$$

Эта оценка и означает, что нелокальная задача I разрешима в пространстве V_1.

Теорема доказана.

Следующий результат существенно отличается от полученных ранее.

Определим числа D_k, $z_{1,k}$ и $z_{2,k}$:

$$D_k=\alpha^2\lambda_k^2-4\beta\lambda_k-4\gamma,\quad z_{1,k}=\frac{1}{2}(-\alpha\lambda_k+\sqrt{D_k}),$$

$$z_{2,k}=\frac{1}{2}(-\alpha\lambda_k-\sqrt{D_k}),\quad k=1,2,\ldots.$$

Обозначим через k_1 наименьшее натуральное число такое, что при $k\geq k_1$ выполняется $D_k>0$ (если $\alpha\neq 0$, то такое число однозначно определено).

Теорема 4. *Пусть $\alpha<0$, $\beta<0$, $a<0$. Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ нелокальная задача* I *имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V_1.*

Доказательство. Пусть $v(x,t)$ — решение начально-краевой задачи (1), (2), (10), (4), $u_0(x)$ — функция $av(x,T)$. Определим функцию $\overline{u}(x,t)$ как решение задачи

$$\overline{u}_{tt}+\left(\alpha\frac{\partial}{\partial t}+\beta\right)\Delta\overline{u}+\gamma\overline{u}=0,\quad (x,t)\in Q, \tag{14}$$

$$\overline{u}(x,t)|_S=0, \tag{15}$$

$$\overline{u}(x,0)=a\overline{u}(x,T)+u_0(x),\quad x\in\Omega, \tag{16}$$

$$\overline{u}_t(x,0)=0,\quad x\in\Omega. \tag{17}$$

Покажем, что функция $\overline{u}(x,t)$ корректно определена и принадлежит V_1.

Поскольку $v(x,t)$ принадлежит V_1, функция $u_0(x)$ будет принадлежать пространству $W_2^2(\Omega)$. Представим ее рядом Фурье по системе $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$u_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_{0k}w_k(x),\quad u_{0k}=\int\limits_{\Omega}u_0(x)w_k(x)\,dx.$$

Функцию $\overline{u}(x,t)$ также будем искать в виде ряда Фурье:

$$\overline{u}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)w_k(x); \tag{18}$$

функции $\varphi_k(t)$ здесь определяются как решения задач

$$\varphi_k''(t) + \alpha\lambda_k\varphi_k'(t) + (\beta\lambda_k + \gamma)\varphi_k(t) = 0,$$

$$\varphi_k(0) = a\varphi_k(T) + u_{0k}, \quad \varphi_k'(0) = 0.$$

Найдя $\varphi_k(t)$, найдем функцию $\overline{u}(x,t)$, но она будет представлять собой формальное решение задачи (14)–(17), реальным же решением она станет тогда, когда будет установлена сходимость ряда (18), а также сходимость рядов, составленных из соответствующих производных слагаемых ряда (18).

Пусть k_2 — наименьшее натуральное число такое, что $\beta\lambda_k + \gamma \geq 0$ при $k \geq k_3$. Далее, зафиксируем положительное число D_0. Поскольку последовательность $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ не ограничена сверху, существует наименьшее натуральное число k_3 такое, что при $k \geq k_3$ выполняется $D_k \geq D_0$.

Положим $k_0 = \max(k_1, k_2, k_3)$. Определим числа d_k:

$$d_k = z_{1,k}(1 - ae^{z_{2,k}T}) - z_{2,k}(1 - ae^{z_{1,k}T}).$$

Заметим, что при $k \geq k_0$ все числа $z_{1,k}$ и $z_{2,k}$ отрицательны, для них выполняются неравенства $z_{2,k} < z_{1,k}$ и при этом последовательность $\{z_{1,k}\}_{k=k_0}^{\infty}$ будет ограниченной, последовательность $\{z_{2,k}\}_{k=k_0}^{\infty}$ будет сходиться к $-\infty$. Далее, для чисел d_k при $k \geq k_0$ имеют место неравенства

$$d_k \geq az_{2,k}e^{z_{1,k}T}(1 - e^{-\sqrt{D_k}T}) \geq \delta_0 az_{2,k}; \tag{19}$$

δ_0 в этих неравенствах — некоторое положительное число, определяющееся числами α, β, γ, T и D_0, а также областью Ω.

Вернемся к функциям $\varphi_k(t)$. При $k \geq k_0$ имеют место равенства

$$\varphi_k(t) = \frac{u_{0k}}{d_k}(z_{1,k}e^{z_{2,k}T} - z_{2,k}e^{z_{1,k}T}).$$

Вследствие (19) функции $\varphi_k(t)$ корректно определены. Далее, имеют место оценки

$$|\varphi_k(t)| \leq M_0|u_{0k}|, \quad |\varphi_k'(t)| \leq M_1|u_{0k}|, \quad |\varphi_k''(t)| \leq M_2|u_{0k}||z_{2,k}| \tag{20}$$

с постоянными M_0, M_1 и M_2, определяющимися числами a, α, β, γ, T и D_0, а также областью Ω.

Определим функции $\overline{u}_1(x,t)$ и $\overline{u}_2(x,t)$:

$$\overline{u}_1(x,t) = \sum_{k=1}^{k_0-1}\varphi_k(t)w_k(x), \quad \overline{u}_2(x,t) = \sum_{k=k_0}^{\infty}\varphi_k(t)w_k(x).$$

В силу неравенства Бесселя [17] для коэффициентов ряда Фурье и оценок (20) для функции $\overline{u}_2(x,t)$ выполняются равенства

$$\int\limits_{\Omega}[\overline{u}_2(x,t)]^2\,dxdt \leq R_0\sum_{k=k_0}^{\infty}u_{0k}^2, \tag{21}$$

$$\int\limits_{\Omega} [\Delta \overline{u}_2(x,t)]^2\, dxdt \le R_1 \sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k^2 u_{0k}^2, \qquad (22)$$

$$\int\limits_{\Omega} [\Delta \overline{u}_{2t}(x,t)]^2\, dxdt \le R_2 \sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k^2 \overline{u}_{0k}^2, \qquad (23)$$

$$\int\limits_{\Omega} [\overline{u}_{2tt}(x,t)]^2\, dxdt \le R_3 \sum_{k=k_0}^{\infty} z_{2k}^2 u_{0k}^2 \le R_4 \sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k^2 u_{0k}^2, \qquad (24)$$

в которых числа R_0–R_4 определяются числами a, α, β, γ, T и D_0, а также областью Ω.

С другой стороны, вследствие принадлежности функции $u_0(x)$ пространству $W_2^2(\Omega)$ и вновь в силу неравенства Бесселя ряды в правых частях неравенств (21)–(24) сходятся. Отсюда и из второго основного неравенства для эллиптических операторов [14] следует, что функция $\overline{u}_2(x,t)$ принадлежит пространству V_1. Очевидно, что и $\overline{u}_1(x,t)$ принадлежит V_1.

Определим функцию

$$u(x,t) = v(x,t) + \overline{u}(x,t).$$

Она принадлежит пространству V_1 и представляет собой искомое решение нелокальной задачи I.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $b > 0$. Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, нелокальная задача* II *имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V_1.*

Доказательство. По решению $v(x,t)$ краевой задачи (1), (2), (10), (4) определим функцию $u_1(x)$: $u_1(x) = bv_t(x,T)$. Вследствие принадлежности функции $f(x,t)$ указанному в формулировке теоремы классу функция $u_1(x)$ корректно определена и принадлежит пространству $W_2^2(\Omega)$. Представим эту функцию рядом Фурье по системе $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{1k} w_k(x), u_{1k} = \int\limits_{\Omega} u_1(x) w_k(x)\, dx.$$

Определим функцию $\widetilde{u}(x,t)$ как решение задачи

$$\widetilde{u}_{tt} + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta\right) \Delta \widetilde{u} + \gamma \widetilde{u} = 0, \quad (x,t) \in Q, \qquad (25)$$

$$\widetilde{u}(x,t)|_S = 0, \qquad (26)$$

$$\widetilde{u}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \qquad (27)$$

$$\widetilde{u}_t(x,0) = b\widetilde{u}_t(x,T) + u_1(x), \quad x \in \Omega. \qquad (28)$$

Положим

$$\widetilde{d}_k = z_{1,k} - z_{2,k} + b(z_{2,k} e^{z_{2,k}T} - z_{1,k} e^{z_{1,k}T}),$$

$$\psi_k(t) = \frac{u_{1k}}{\widetilde{d}_k}(e^{z_{1,k}t} - e^{z_{2,k}t}), \quad k = 1, 2, \dots .$$

Формальное решение задачи (25)–(28) определяется равенством

$$\widetilde{u}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) w_k(x).$$

Вследствие условия $b > 0$ имеют место неравенства

$$\widetilde{d}_k \geq \delta_1 |z_{1,k}|, \quad \delta_1 > 0, \ k = 1, 2, \dots .$$

Из этих неравенств следует, что, во-первых, все функции $\psi_k(t)$ корректно определены, а во-вторых, для функций $\psi_k(t)$ выполняются неравенства

$$|\psi_k(t)| \leq M_0' |u_{1,k}|, \quad |\psi_k'(t)| \leq M_1' |u_{1k}|, \quad |\psi_k''(t)| \leq M_2' |u_{1k}| \cdot |z_{2,k}|, \qquad (29)$$

постоянные M_0', M_1', M_2' в которых определяются числами α, β, γ, T и b, а также областью Ω.

Поскольку $u_1(x)$ принадлежит $W_2^2(\Omega)$, из неравенств (29) вытекает, что $\widetilde{u}(x,t)$ принадлежит V_1 (см. доказательство теоремы 4).

Положим

$$u(x,t) = v(x,t) + \widetilde{u}(x,t).$$

Эта функция и даст искомое решение нелокальной задачи II.

Теорема доказана.

Исследование разрешимости нелокальной задачи III нетрудно провести по схеме, представленной при доказательстве теорем 4 и 5, но выкладки будут существенно более громоздкими. Очевидно лишь, что условиями разрешимости будут условия $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $a < 0$, $b > 0$, а для правой части $f(x,t)$ должны выполняться включения $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$.

Заключение

Представленные в работе результаты о разрешимости нелокальных задач для уравнений (1) новые, поскольку новыми являются условия $a < 0$ или $b > 0$. Ранее разрешимость таких же задач была установлена при условиях $|a| < 1$ или (и) $|b| < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser-Verl., 1997.
2. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
3. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 26. М.: РУДН, 2007. С. 3–132; Неклассические краевые задачи. II, Уравнения в частных производных // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 33. М.: РУДН, 2009. С. 3–179.
4. *Пулькина Л. С.* Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд-во Самар. ун-та, 2012.

5. *Pulkina L. S., Beylin A. B.* Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar // Electron. J. Differ. Equ. 2019. Paper No. 29, 9 p.

6. *Попов Н. С.* Разрешимость краевой задачи для псевдопараболического уравнения с нелокальными интегральными условиями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 3. С. 359.

7. *Попов Н. С.* О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для одномерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2015. Т. 3. С. 29–43.

8. *Алсыкова А. А.* Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнения Буссинеска // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 1. С. 3–11.

9. *Сафиуллова Р. Р.* Краевая задача с интегральными условиями для дифференциального уравнения третьего порядка // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, № 1. С. 85–101.

10. *Кожанов А. И., Дюжева А. В.* Нелокальные задачи с интегральным условием для дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 4. С. 607–620.

11. *Кожанов А. И., Дюжева А. В.* Нелокальные задачи с интегральным смещением для параболических уравнений высокого порядка // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2021. Т. 36. С. 14–28.

12. *Кожанов А. И., Дюжева А. В.* Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 423–434.

13. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

14. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

15. *Triebel H.* Interpolation theory. Functional spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutcher Verl. Wiss., 1978.

16. *Evans L. C.* Partial differential equations. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. (Grad. Stud. Math.; V. 19).

17. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 25 октября 2021 г.
После доработки 25 октября 2021 г.
Принята к публикации 26 ноября 2021 г.

Тарасова Галина Ивановна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
кафедра высшей математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891
gi-tarasova@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2021. Том 28, № 4

UDC 517.95

ON SOLVABILITY OF NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL EQUATION OF COMPOSITE TYPE

G. I. Tarasova

Abstract: We study the solvability in anisotropic Sobolev spaces of nonlocal in time problems for the differential equations of composite (Sobolev) type

$$u_{tt} + \left(\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta\right)\Delta u + \gamma u = f(x,t),$$

where $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (0,T)$, $0 < T < +\infty$, α, β, and γ are real numbers, and $f(x,t)$ is a given function. We prove theorems of existence and non-existence, uniqueness and non-uniqueness for regular solutions, those having all generalized Sobolev derivatives in the equation.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.27.62.007

Keywords: differential equation of composite type, nonlocal problem, regular solution, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. *Skubachevskii A. L.*, Elliptic Functional Differential Equations and Applications, Birkhäuser-Verl., Basel; Boston; Berlin (1997).
2. *Nakhushev A. M.*, Problems with Shifts for Partial Differential Equations [in Russian], Nauka, Moscow (2006).
3. *Skubachevskii A. L.*, "Nonclassical boundary value problems, I," J. Math. Sci., **155**, No. 2, 199–334 (2008); "Nonclassical boundary value problems, II," J. Math. Sci., **166**, No. 4, 377–561 (2010).
4. *Pulkina L. S.*, Problems with Nonclassical Conditions for Hyperbolic Equations [in Russian], Izdat. Samarsk. Univ., Samara (2012).
5. *Pulkina L. S. and Beylin A. B.*, "Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar," Electron. J. Differ. Equ., Paper No. 29 (2019).
6. *Popov N. S.*, "Solvability of a boundary value problem for a pseudoparabolic equation with nonlocal integral conditions," Differ. Equ., **51**, No. 3, 362–375 (2015).
7. *Popov N. S.*, "On the solvability of spatial nonlocal boundary value problems for one-dimensional pseudoparabolic and pseudohyperbolic equations [in Russian]," Vestn. Samar. Gos. Univ., Ser. Estestvennonauch. Nauki, **125**, No. 3, 29–43 (2015).
8. *Alsykova A. A.* "Nonlocal problems with integral conditions for Boussinesq equations [in Russian]," Math. Zametki SVFU, **23**, No. 1, 3–11 (2016).
9. *Safiullova R. R.*, "The boundary-value problem with integral conditions for differential equations of third order [in Russian]," Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform., **7**, No. 1, 85–101 (2007).
10. *Kozhanov A. I. and Dyuzheva A. V.*, "Non-local problems with an integral condition for third-order differential equations [in Russian]," Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, **24**, No. 4, 607–620 (2020).

11. *Kozhanov A. I. and Dyuzheva A. V.*, "Non-local problems with integral displacement for high-order parabolic equations [in Russian]," Izv. Irkut. Univ., Ser. Mat., **36**, 14–28 (2021).

12. *Kozhanov A. I. and Dyuzheva A. V.*, "The second initial-boundary value problem with integral displacement for second-order hyperbolic and parabolic equations [in Russian]," Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, **25**, No. 3, 423–434 (2021).

13. *Sobolev S. L.*, Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1988).

14. *Ladyzhenskaya O. A. and Uraltseva N. N.*, Linear and Quasilinear Elliptic Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1973).

15. *Triebel H.*, Interpolation Theory, Functional Spaces, Differential Operators, VEB Deutcher Verl. Wiss., Berlin (1978).

16. *Evans L. C.*, Partial Differential Equations, Amer. Math. Soc. Publ., Providence, RI (1998) (Grad. Stud. Math.; vol. 19).

17. *Trenogin V. A.*, Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).

Submitted October 25, 2021
Revised October 25, 2021
Accepted 26 November, 2021

Galina I. Tarasova
Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677891, Russia
gi-tarasova@mail.ru