Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2021. Том 28, № 4

УДК 517.95

КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СО СЛАБЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

А. И. Кожанов, Г. А. Варламова

Аннотация. Целью работы является исследование разрешимости естественных краевых задач для некоторых классов вырождающихся квазиэллиптических уравнений. Особенностями изучаемых задач является то, что, несмотря на вырождение, граничные многообразия в них не освобождаются от несения краевых условий. Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, т. е. решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение. Указываются также некоторые обобщения и усиления представленных в работе результатов.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.18.43.004

Ключевые слова: квазиэллиптические уравнения, краевые задачи, вырождение, регулярные решения, существование, единственность.

Введение

В 1951 году М. В. Келдыш [1] (см. также [2]) показал, что для эллиптических вырождающихся по прямой $y = 0$ уравнений

$$u_{xx} + y^m u_{yy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,t) \quad (m \geq 0) \qquad (*)$$

корректными могут быть как задача с заданием краевых условий на всей границе области определения уравнения (задача Д), так и задача с освобождением от несения краевого условия части границы, лежащей на оси абсцисс (задача Е). В дальнейшем результаты М. В. Келдыша в достаточно полной степени переносились и обобщались на краевые задачи для эллиптико-параболических уравнений второго порядка [2–4], для параболических уравнений с меняющимся направлением времени, гиперболо-параболических уравнений и уравнений смешанного типа [5–7]. Но в то же время столь же полного исследования разрешимости краевых задач для квазиэллиптических уравнений [8, 9] с вырождением на сегодняшний день нет. Частично восполнить данный пробел и предполагают авторы в настоящей работе.

Все построения и рассуждения будут основаны на свойствах пространств Лебега L_p и Соболева W_p^l. Необходимые определения можно найти в монографиях [10–12].

Дифференциальные уравнения, изучаемые в работе, могут иметь как характеристическое вырождение, подобное вырождению в уравнении М. В. Келдыша $(*)$, так и нехарактеристическое и двойное вырождение, т. е. вырождение порядка. Несмотря на это обстоятельство, в работе будет доказано существование регулярных решений изучаемых задач, т. е. решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Изучаемые в работе уравнения имеют модельный вид. Возможные обобщения (на более общие уравнения, на другие краевые задачи, и т. п.) будут описаны в конце статьи.

1. Постановка задач

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, \dots, x_n$, Γ — граница Ω. Будем считать для простоты, что Γ — бесконечно дифференцируемое компактное многообразие. Далее, пусть Q — цилиндр $\Omega \times (0,T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0,T)$ — боковая граница Q, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, D_t^k — производная $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$ $(D_t^1 = D_t)$, p — целое неотрицательное число, Δ — оператор Лапласа, действующий по переменным $x_1, \dots, x_n$, L — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$Lv = \varphi(t) D_t^{2p} v + (-1)^{p+1} \psi(t) \Delta v + c(x,t) v.$$

Краевая задача I. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$Lu = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,t)|_S = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega,\ k = 0, \dots, p-1, \tag{3}$$

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega,\ k = 0, \dots, p-1. \tag{4}$$

Краевая задача II. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (2) *и* (3), *а также условия*

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega,\ k = p, \dots, 2p-1. \tag{5}$$

Кроме краевых задач I и II методами настоящей работы можно исследовать и другие задачи. О некоторых из них будет сказано ниже.

2. Разрешимость краевых задач I и II

Как указано выше, цель настоящей работы состоит в доказательстве существования и единственности регулярных решений краевых задач I и II, т. е. в доказательстве существования и единственности решений, принадлежащих пространству $W_2^{2,2p}(Q)$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$\varphi(t) \in C([0,T]), \quad \varphi(t) > 0 \text{ при } t \in (0,T], \quad \varphi(0) = 0; \tag{6}$$

$$\psi(t) \in C([0,T]), \quad \psi(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0,T]; \tag{7}$$

$$c(x,t) \in C^2(\overline{Q}), \quad (-1)^p c(x,t) \geq c_0 > 0, \quad (-1)^p \Delta c(x,t) \leq 0 \text{ при } (x,t) \in \overline{Q}; \tag{8}$$

$$t^{p-\frac{1}{2}}[\varphi(t)]^{-1} \in L_2([0,T]). \tag{9}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *такой, что*

$$[\varphi(t)]^{-1} f(x,t) \in L_2\big(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big),$$

краевая задача I *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* $W_2^{2,2p}(Q)$.

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации.

Пусть $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность чисел из интервала $(0,1)$, монотонно сходящаяся к 0. Положим

$$\varphi_m(t) = \varphi(t) + \varepsilon_m, \quad \psi_m(t) = \psi(t) + \varepsilon_m.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$\varphi_m(t) D_t^{2p} u + (-1)^{p+1} \psi_m(t) \Delta u + c(x,t) u - \varepsilon_m \varphi_m(t) \Delta^2 u = f(x,t) \tag{10}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4), *а также*

$$\Delta u(x,t)|_S = 0, \quad x \in \Omega. \tag{11}$$

В этой задаче уравнение (10) является невырожденным квазиэллиптическим уравнением. Используя классический метод Галёркина [13, 14] или метод продолжения по параметру [15], нетрудно показать, что при фиксированном m и при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ задача (10), (2)–(4), (11) имеет решение $u_m(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{4,2p}(Q)$. Покажем, что для семейства $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ имеют место равномерные по m априорные оценки.

Последовательно умножая уравнение (10) (при $u = u_m$) на функции

$$[\varphi_m(t)]^{-1} u_m(x,t), \quad [\varphi_m(t)]^{-1} \Delta u_m(x,t), \quad [\varphi_m(t)]^{-1} \Delta^2 u_m(x,t),$$

интегрируя по цилиндру Q, далее используя формулу интегрирования по частям, применяя условия (6)–(8) и дополнительно учитывая принадлежность функции $f(x,t)$ пространству $L_2\big(0,T;W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big)$, нетрудно показать, что для функций $u_m(x,t)$ будет выполняться оценка

$$\int\limits_Q \big(D_t^p\Delta u_m\big)^2\,dxdt+\varepsilon_m\int\limits_Q (\Delta^2 u_m)^2\,dxdt\le M_1\int\limits_Q\left[\frac{f^2}{\varphi_m^2(t)}+\frac{(\Delta f)^2}{\varphi_m^2(t)}\right]dxdt \qquad (12)$$

с постоянной M_1, определяющейся лишь функцией $c(x,t)$.

На следующем шаге умножим уравнение для $u_m(x,t)$ на $[\varphi_m(t)]^{-1}D_t^{2p}u_m(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Получим равенство

$$\int\limits_Q\big(D_t^{2p}u_m\big)^2\,dxdt=(-1)^p\int\limits_Q\frac{\psi_m}{\varphi_m}\Delta u_m D_t^{2p}u_m\,dxdt+\varepsilon_m\int\limits_Q\Delta^2u_mD_t^{2p}u_m\,dxdt$$
$$-\int\limits_Q\frac{c}{\varphi_m}u_mD_t^{2p}u_m\,dxdt+\int\limits_Q\frac{f}{\varphi_m}u_mD_t^{2p}u_m\,dxdt. \qquad (13)$$

Оценим первое слагаемое в правой части равенства (13):

$$\left|(-1)^p\int\limits_Q\frac{\psi_m}{\varphi_m}\Delta u_mD_t^{2p}u_m\,dxdt\right|$$
$$\le(\max_{[0,T]}\psi(t)+1)\int\limits_Q\frac{1}{\varphi_m}\left(\int\limits_\Omega(\Delta u_m(x,t))^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int\limits_\Omega\big(D_t^{2p}u_m(x,t)\big)^2\,dx\right)^{\frac12}dt.$$

Оценка (12) означает, что выполняется неравенство

$$\int\limits_\Omega(\Delta u_m(x,t))^2dx\le M_2t^{2p-1}$$

с постоянной M_2, определяющейся лишь функциями $c(x,t)$ и $f(x,t)$. Используя это неравенство, далее условие (9) и применяя неравенство Юнга, получим, что выполняется оценка

$$\left|(-1)^p\int\limits_Q\frac{\psi_m}{\varphi_m}\Delta u_mD_t^{2p}u_m\,dxdt\right|\le\delta\int\limits_Q\big(D_t^{2p}u_m\big)^2\,dxdt+M(\delta), \qquad (14)$$

в которой δ — произвольное положительное число, $M(\delta)$ определяется помимо числа δ также функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$.

Для третьего слагаемого в правой части равенства (13) имеет место оценка, аналогичная оценке (14), второе и четвертое слагаемые в правой части равенства (13) оцениваются непосредственно с помощью неравенства Юнга. Подбирая далее параметр δ, а также соответствующий параметр, полученный при оценке второго и четвертого слагаемых в правой части равенства (13) малыми, получим априорную оценку

$$\int\limits_Q\big(D_t^p\Delta u_m\big)^2\,dxdt\le M_3 \qquad (15)$$

с постоянной M_3, определяющейся лишь функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$.

Из оценок (12) и (15), а также из свойства рефлективности гильбертова пространства [15] следует, что существуют последовательность $\{u_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ и функция $u(x,t)$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место сходимости

$$u_{m_k}(x,t) \to u(x,t) \quad \text{слабо в пространстве } W_2^{2,2p}(Q),$$

$$\varepsilon_{m_k} D_t^{2p} u_{m_k}(x,t) \to 0 \quad \text{слабо в пространстве } L_2(Q),$$

$$\varepsilon_{m_k} \Delta u_{m_k}(x,t) \to 0 \quad \text{слабо в пространстве } L_2(Q),$$

$$\varepsilon_{m_k} \Delta^2 u_{m_k}(x,t) \to 0 \quad \text{слабо в пространстве } L_2(Q).$$

Очевидно, что предельная функция $u(x,t)$ и будет требуемым решением краевой задачи I.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть выполняются условия* (6)–(9), *а также условие*

$$[\varphi(t)]^{-1} f(x,t) \in L_2(0,T;L_2(\Omega)).$$

Тогда для решения $u(x,t)$ краевой задачи I *из пространства $W_2^{2,2p}(Q)$ будет справедливо включение $[\varphi(t)]^{-1}u(x,t) \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$.*

Доказательство. Пусть ε — фиксированное положительное число. Умножим уравнение (1) на функцию $[\varphi_(t)+\varepsilon]^{-1}u(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Получим равенство

$$\int\limits_Q D_t^{2p} u \cdot u\,dxdt + (-1)^{p+1} \int\limits_Q \frac{\psi(t)}{\varphi(t)+\varepsilon} \Delta u \cdot u\,dxdt + \int\limits_Q \frac{c(x,t)}{\varphi(t)+\varepsilon} u^2\,dxdt$$
$$= \varepsilon \int\limits_Q \frac{1}{\varphi(t)+\varepsilon} D_t^{2p} u \cdot u\,dxdt + \int\limits_Q \frac{f(x,t)}{\varphi(t)+\varepsilon} u\,dxdt.$$

Интегрируя по частям в этом равенстве, а также используя условия следствия, получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи I из пространства $W_2^{2,2p}(Q)$ выполняется оценка

$$\int\limits_Q \left(D_t^p u\right)^2 dxdt \le R_0.$$

Имеют место неравенства

$$\int\limits_Q \frac{u^2}{\varphi^2(t)}\,dxdt \le C \int\limits_Q \frac{t^{2p-1}}{\varphi^2(t)} \left(\int\limits_Q \left(D_\tau^p u\right)^2 dxd\tau \right) dxdt \le C R_0 \operatorname{mes}\Omega \int\limits_0^T \frac{t^{2p-1}}{\varphi^2(t)}\,dt < +\infty.$$

Из этих неравенств и следует, что функция $[\varphi(t)]^{-1}u(x,t)$ принадлежит пространству $L_2(Q)$.

Следствие доказано.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (4)–(6). *Тогда краевая задача* I *не может иметь в пространстве* $W_2^{2,2p}(Q)$ *более одного решения.*

Доказательство. Пусть в краевой задаче I выполняется $f(x,t) \equiv 0$, и пусть $u(x,t)$ — решение из пространства $W_2^{2,2p}(Q)$ задачи I с такой правой частью. Умножим уравнение (1) на функцию $[\varphi_(t)]^{-1}u(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q (согласно доказанному следствию это возможно). Интегрируя по частям и используя условия (6)–(9), получим, что выполняется неравенство

$$\int\limits_Q \left(D_t^p u\right)^2 dxdt \leq 0.$$

Из этого неравенства следует, что $D_t^p u$ — тождественно нулевая в Q функция. Другими словами, для функции $u(x,t)$ выполняется уравнение

$$(-1)^{p+1}\psi(t)\Delta u + c(x,t)u = 0.$$

Из этого уравнения и условия (8) вытекает, что $u(x,t)$ есть тождественно нулевая в Q функция. А это означает, что краевая задача I при выполнении условий теоремы не может иметь в пространстве $W_2^{2,2p}(Q)$ более одного решения.

Теорема доказана.

Для краевой задачи II имеют место полностью аналогичные результаты о существовании и единственности решений. Объединим результаты в одну теорему.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (6)–(9). *Тогда для любой функции* $f(x,t)$ *такой, что*

$$[\varphi(t)]^{-1}f(x,t) \in L_2\big(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big),$$

краевая задача II *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* $W_2^{2,2p}(Q)$, *и при этом ровно одно.*

Доказательство этой теоремы состоит в повторении доказательств теорем 1 и 2.

3. Комментарии и дополнения

3.1. Условие (9) теорем 1 и 3 означает, что характер вырождения уравнения (1) связан с порядком уравнения (т. е. он не может быть произвольным). Именно поэтому авторы и называют изученные уравнения «уравнениями со слабым вырождением». Вместе с тем заметим, что функция $\psi(t)$ может вырождаться, наоборот, произвольным образом и может даже обращаться в нуль на подмножестве отрезка $[0,T]$ ненулевой меры.

3.2. В краевой задаче I функция $\varphi(t)$ может обращаться в нуль и при $t = T$. В этом случае дополнительно к условию (9) необходимо потребовать выполнения условия

$$(T-t)^{\frac{p}{2}-1}\varphi(t) \in L_2([0,T]).$$

3.3. Краевое условие Дирихле (условие (2)) вполне можно заменить условиями второй или же третьей краевых задач. Суть результатов о существовании и единственности регулярных решений от этого не изменится.

3.4. Оператор Лапласа в уравнении (1) можно заменить более общим эллиптическим оператором, например, оператором вида

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{x_j}) + a_0(x)u.$$

Далее, нетрудно изучить разрешимость некоторых краевых задач и для дважды вырождающихся уравнений вида

$$\varphi(t)D_t^{2p}u + \psi(t)\Delta^l u + c(x,t)u = f(x,t), \tag{16}$$

в которых l — фиксированное натуральное число (с естественным добавлением краевых условий на боковой поверхности S), а также для уравнений (1) и (16) со всеми младшими членами. Суть результатов при этом не изменится, но условия и выкладки будут более громоздкими.

3.5. В работах авторов [16, 17] изучены другие классы дифференциальных уравнений со слабым вырождением — именно, изучены квазипараболические уравнения и уравнения с кратными характеристиками. Для этих уравнений также получены теоремы о существовании и единственности регулярных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.
2. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966.
3. *Fichera G* On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order // Matematika. 1963. V. 7, N 6. P. 99–122.
4. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. М.: ВИНИТИ, 1971.
5. *Врагов В. Н.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в пространстве // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
6. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математический физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
7. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Вычисл. центр СО РАН, 1995.
8. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
9. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
10. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
11. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
12. *Triebel H.* Interpolation theory. Functional spaces. Differetial operators. Berlin: VEB Deutcher Verl. Wiss., 1978.

13. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
14. *Дубинский Ю. А.* Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23, № 1. С. 45–90.
15. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
16. *Кожанов А. И.* Квазипараболические уравнения со слабым вырождением // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 1. С. 27–36.
17. *Кожанов А. И., Лукина Г. А.* Вырождение в дифференциальных уравнениях с кратными характеристиками // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 3. С. 19–30.

Поступила в редакцию 1 ноября 2021 г.
После доработки 1 ноября 2021 г.
Принята к публикации 26 ноября 2021 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Академия наук Республики Саха (Якутия),
ул. Ленина, 33, Якутск 677007
kozhanov@math.nsc.ru

Варламова Галина Александровна
Политехнический институт (филиал) ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова» в г. Мирном,
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678175, Республика Саха (Якутия)
lukina-g@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2021. Том 28, № 4

UDC 517.95

QUASI–ELLIPTIC EQUATIONS WITH DEGENERATION

A. I. Kozhanov and G. A. Varlamova

Abstract: We study the solvability of boundary value problems for some classes of degenerate quasi-elliptic equations. The main feature of the problems under study is that, despite the degeneration, boundary conditions should still be imposed on the boundary manifolds. We prove the existence and uniqueness theorems for the regular solutions, those having all generalized Sobolev derivatives required in the equation in the inner subdomains. Moreover, we describe some possible enhancements and generalizations of the obtained results.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.18.43.004

Keywords: quasi-elliptic equations, degeneration, boundary value problem, regular solution, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. *Keldysh M. V.*, “On some cases of degeneration of an equation of elliptic type on the domain boundary [in Russian],” Dokl. Akad. Nauk SSSR, **77**, No. 2, 181–183 (1951).
2. *Smirnov M. M.*, Degenerating Elliptic and Hyperbolic Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1966).
3. *Fichera G.*, “On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order,” Matematika, **7**, No. 6, 99–122 (1963).
4. *Oleinik O. A. and Radkevich E. V.*, Second Order Equations with Nonnegative Characteristic form, VINITI, Moscow (1971).
5. *Vragov V. N.*, “Theory of boundary value problems for equations of mixed type in space,” Differ. Equ., **13**, 759–764 (1977).
6. *Vragov V. N.*, Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics [in Russian], Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk (1983).
7. *Egorov I. E. and Fedorov V. E.*, High-Order Nonclassical Equations of Mathematical Physics [in Russian], Vychisl. Tsentr SO RAN, Novosibirsk (1995).
8. *Uspenskii S. V., Demidenko G. V., and Perepelkin V. G.*, Embedding Theorems and Applications to Differential Equations [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1984).
9. *Demidenko G. V. and Uspenskii S. V.*, Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative, Marcel Dekker, New York; Basel (2003).
10. *Sobolev S. L.*, Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1991).
11. *Ladyzhenskaya O. A. and Uraltseva N. N.*, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Acad. Press, New York; London (1968).
12. *Triebel H.*, Interpolation Theory, Functional Spaces, Differential Operators, VEB Deutcher Verl. Wiss., Berlin (1978).
13. *Lions J.-L.*, Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires, Gauthier-Villars, Paris (1969).
14. *Dubinskii Yu. A.*, “Quasilinear elliptic and parabolic equations of arbitrary order,” Russ. Math. Surv., **23**, No. 1, 45–91 (1968).

15. *Trenogin V. A.*, Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).
16. *Kozhanov A.*, "Boundary value problems for third-order pseudoelliptic equations with degeneration [in Russian]," Mat. Zametki SVFU, **28**, No. 1, 27–36 (2021).
17. *Kozhanov A. and Lukina G.*, "Degeneration in differential equations with multiple characteristics [in Russian]," Mat. Zametki SVFU, **28**, No. 3, 19–30 (2021).

Submitted November 1, 2021
Revised November 1, 2021
Accepted November 26, 2021

Alexandr I. Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
Academy of Science of the Republic of Sakha (Yakutia),
33 Lenin Avenue, Yakutsk 677007, Russia
`kozhanov@math.nsc.ru`

Galina A. Varlamova
Ammosov North-Eastern Federal University,
Mirny Polytechnic Institute,
5/1 Tikhonov Street, Mirny 678175, Russia
`lukina-g@mail.ru`