Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2021. Том 28, № 4

УДК 517.946

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. И. Григорьева

Аннотация. Изучается разрешимость задачи Дирихле для дифференциальных уравнений составного (соболевского) типа вида

$$D_t\big[(-1)^p D_t^{2p+1}u - h(x)u_{xx}\big] + a(x)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t)$$

в области $Q = \{(x,t) : x \in (-1,0) \cup (0,1),\ t \in (0,T),\ 0 < T < +\infty\}$ ($p \geq 1$ целое, $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$). Особенностью рассматриваемых уравнений является то, что коэффициенты $h(x)$ и $a(x)$ в нем могут иметь разрыв первого рода при переходе через точку $x = 0$. Помимо обычных граничных условий Дирихле в изучаемой задаче задаются также условия сопряжения на линии $x = 0$. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.56.53.002

Ключевые слова: дифференциальные уравнения составного типа, задача Дирихле, разрывные коэффициенты, регулярные решения, существование, единственность.

1. Введение

Работа посвящена исследованию разрешимости краевой задачи с данными Дирихле и дополнительными условиями сопряжения для дифференциальных уравнений составного (соболевского) типа вида

$$D_t\big[(-1)^p D_t^{2p+1}u - h(x)u_{xx}\big] + a(x)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

($D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $p \geq 0$ целое) с коэффициентами $h(x)$ и $a(x)$, имеющими, быть может, разрыв первого рода в некоторой внутренней точке своей области определения.

Краевые задачи для дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами достаточно хорошо изучены для классических уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов [1—5], для уравнений смешанного типа [6—12]; из работ последнего времени по близкой к настоящей работе

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (НИР No. FSRG–2020–0006).

тематике отметим работы [13—16]. Краевые задачи для неклассических дифференциальных уравнений (уравнений составного типа, уравнений с кратными характеристиками, уравнений с меняющимся направлением эволюции и т.п.) с разрывными коэффициентами исследованы в значительно меньшей степени; из работ, схожих с данной статьей по постановке задач и технике их исследования и посвященных теории краевых задач для неклассических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами, выделим работы [17—32].

Дифференциальные уравнения (1) в случае $p = 0$ и с непрерывными коэффициентами в некоторых источниках [33—35] называют псевдогиперболическими уравнениями. Для таких уравнений (т. е. уравнений (1) при $p = 0$) будет корректна классическая начально-краевая задача, но вместе с тем может быть корректна и классическая задача Дирихле.

Именно задача Дирихле, но для более общих уравнений — при $p \geq 0$ и в случае разрывных коэффициентов — и будет предметом исследования в настоящей работе.

Уточним, что целью работы будет доказательство существования и единственности регулярных решений — решений, имеющих в областях непрерывности коэффициентов все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение.

2. Постановка задачи

Пусть x — точка отрезка $[-1, 1]$ оси Ox, t — точка отрезка $[0, T]$, $0 < T < \infty$, Q_1, Q_2 и Q — цилиндры $(-1, 0) \times (0, T)$, $(0, 1) \times (0, T)$ и $(-1, 1) \times (0, T)$ соответственно, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ — функции, определенные при $(x, t) \in \overline{Q}$, $h(x)$, $a(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in [-1, 1]$ и, быть может, имеющие разрыв 1-го рода при $x = 0$, α, β — заданные действительные числа.

Краевая задача. *Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия*

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \tag{2}$$

$$D_t^k u(x, t)\big|_{t=0} = 0, \quad k = 0, \ldots, p, \ x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \tag{3}$$

$$D_t^k u(x, t)\big|_{t=T} = 0, \quad k = 0, \ldots, p, \ x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \tag{4}$$

а также условия сопряжения

$$u(-0, t) = \alpha u(+0, t), \quad u_x(+0, t) = \beta u_x(-0, t), \quad t \in (0, T). \tag{5}$$

Определим необходимые функциональные пространства V_1, V_2 и V:

$$V_i = \left\{ v(x, t) : \int\limits_{Q_i} \left(v^2 + v_{xxt}^2 + \left(D_t^{2p+2} v \right)^2 \right) dxdt < +\infty \right\}, \quad i = 1, 2,$$

$$V = \{ v(x, t) : v(x, t) \in V_1, \ v(x, t) \in V_2 \}$$

(все производные понимаются как обобщенные производные по С. Л. Соболеву). Норму в этих пространствах зададим равенствами

$$\|v\|_{V_i} = \left\{ \int\limits_{Q_i} \left(v^2 + v_{xxt}^2 + \left(D_t^{2p+2} v\right)^2\right) dxdt \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \|v\|_V = \|v\|_{V_1} + \|v\|_{V_2}.$$

Очевидно, что пространства V_1, V_2 и V с этими нормами будут банаховыми пространствами.

3. Разрешимость краевой задачи

Пусть

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x) & \text{при } x \in [-1, 0), \\ \lim\limits_{x\to-0} h(x) & \text{при } x = 0, \end{cases} \qquad h_2(x) = \begin{cases} h(x) & \text{при } x \in (0, 1], \\ \lim\limits_{x\to+0} h(x) & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

$$a_1(x) = \begin{cases} a(x) & \text{при } x \in [-1, 0), \\ \lim\limits_{x\to-0} a(x) & \text{при } x = 0, \end{cases} \qquad a_2(x) = \begin{cases} a(x) & \text{при } x \in (0, 1]), \\ \lim\limits_{x\to+0} a(x) & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

и

$$h_{01} = \max_{x\in[-1,0]} |h_1'(x)|, \quad h_{02} = \max_{x\in[0,1]} |h_2'(x)|.$$

Заметим, что для функций $u(x,t) \in V_1$ и $u(x,t) \in V_2$ справедливы неравенства

$$\int\limits_{Q_i} u_t^2\, dxdt \le \left(\frac{T}{\pi}\right)^{2p} \int\limits_{Q_i} \left(D_t^{p+1} u\right)^2 dxdt, \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

при условии, что $D_t^k u(x,t)\big|_{t=0} = 0$, $k = 0, \dots, p$.

Исследуем вопрос о единственности решений краевой задачи (2)–(5).

Теорема 1. *Пусть*

$$\alpha\beta h(-0)h(+0) > 0, \tag{7}$$

$$\begin{gathered} h_1(x) \in C^1([-1,0]), \quad h_2(x) \in C^1([0,1]), \\ a_1(x) \in C^2([-1,0]), \quad a_2(x) \in C^2([0,1]), \quad c(x,t) \in C^1(\overline{Q}),\ t \in (0,T), \end{gathered} \tag{8}$$

$$a''(x) + 2c(x,t) \le 0, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1),\ t \in (0,T), \tag{9}$$

$$a'(-0) \ge 0, \quad a'(+0) \le 0, \tag{10}$$

$$h(+0)a(-0) = h(-0)a(+0). \tag{11}$$

Пусть также существует число $\delta_0 > 0$ *такое, что*

$$2\delta_0^2 a(x) - h_{01}^2 \ge 0, \quad x \in [-1,0), \quad 2\delta_0^2 a(x) - h_{02}^2 \ge 0, \quad x \in (0,1], \tag{12}$$

$$\delta_0^2 T^{2p} \le 2\pi^{2p}. \tag{13}$$

Тогда краевая задача (2)–(5) *может иметь не более одного решения в пространстве* V.

Доказательство. Пусть $\gamma = \frac{\alpha h(-0)}{\beta h(+0)}$, и пусть в уравнении (1) выполняется $f(x,t) \equiv 0$. Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{Q_1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\big[(-1)^p D_t^{2p+1} u - h(x)u_{xx}\big] + a(x)u_{xx} + c(x,t)u \right)(-u)\,dxdt +$$
$$+ \int\limits_{Q_2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\big[(-1)^p D_t^{2p+1} u - h(x)u_{xx}\big] + a(x)u_{xx} + c(x,t)u \right)(-\gamma u)\,dxdt = 0,$$

которое посредством интегрирования по частям, а также в силу условий (2)–(5) приводится к виду

$$\int\limits_{Q_1} \big(D_t^{p+1}u\big)^2\,dxdt + \gamma \int\limits_{Q_2} \big(D_t^{p+1}u\big)^2\,dxdt + \int\limits_{Q_1} a(x)u_x^2\,dxdt + \gamma \int\limits_{Q_2} a(x)u_x^2\,dxdt$$
$$- \int\limits_{Q_1} \left[\frac{a''(x)}{2} + c(x,t)\right] u^2\,dxdt - \gamma \int\limits_{Q_2} \left[\frac{a''(x)}{2} + c(x,t)\right] u^2\,dxdt$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^T a'(-0)u^2(-0,t)\,dt - \frac{\gamma}{2}\int\limits_0^T a'(+0)u^2(+0,t)\,dt$$
$$+ \int\limits_{Q_1} h'(x)u_x u_t\,dxdt + \gamma \int\limits_{Q_2} h'(x)u_x u_t\,dxdt = 0. \quad (14)$$

Применим неравенства Гёльдера и Юнга к последним двум слагаемым левой части (14):

$$\begin{aligned} \left|\int\limits_{Q_1} h'(x)u_x u_t\right| dxdt &\le \frac{\delta_0^2}{2}\int\limits_{Q_1} u_t^2\,dxdt + \frac{h_{01}^2}{2\delta_0^2}\int\limits_{Q_1} u_x^2\,dxdt, \\ \left|\int\limits_{Q_2} h'(x)u_x u_t\right| dxdt &\le \frac{\delta_0^2}{2}\int\limits_{Q_2} u_t^2\,dxdt + \frac{h_{02}^2}{2\delta_0^2}\int\limits_{Q_2} u_x^2\,dxdt. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда из равенства (14) в силу (15), а также неравенства (6) и условий (7)–(13) функция $u(x,t)$ будет тождественно равна нулю. Это означает, что краевая задача (2)–(5) будет иметь не более одного решения в пространстве V.

Теорема доказана.

Перейдем к доказательству существования решения рассматриваемой краевой задачи. Пусть

$$\alpha_1 = \frac{\alpha a(+0)}{a(-0)}, \quad \beta_1 = \frac{\beta a(-0)}{a(+0)}.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (7)–(13) *и условия*

$$c(x,t) \in C^1([-1,0)) \cup C^1((0,1]), \quad c(-0,t) = c(+0,t), \quad 0 \le c_x(x,t) \le c_0, \\ c_x(+0,t) \ge 0, \quad c_x(-0,t) \le 0, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1),\ t \in (0,T). \tag{16}$$

Пусть также существует число $\delta_1 > 0$ *такое, что*

$$2\delta_1^2 a(x) \ge h_{01}^2 + c_0^2, \quad 2\delta_1^2 a(x) \ge h_{02}^2 + c_0^2, \quad x \in (-1,1),\ t \in (0,T), \tag{17}$$

$$f(-1,t) = f(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ \alpha_1\beta_1 f_x(-0,t) f(+0,t) = f(-0,t) f_x(+0,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{18}$$

Тогда краевая задача (2)–(5) *имеет решение, принадлежащее пространству* V, *для любой функции* $f(x,t)$, $f_{xx}(x,t)$ *из пространства* $L_2(Q)$.

Доказательство. Вначале воспользуемся методом регуляризации. Рассмотрим следующую краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в Q решением уравнения

$$L_\varepsilon u = D_t\big[(-1)^p D_t^{2p+1} u - h(x) u_{xx}\big] + a(x) u_{xx} + c(x,t) u - \varepsilon u_{xxxx} = f(x,t), \tag{19}$$

где ε — положительное число, и для которой выполняются условия (2)–(5) и условия

$$u_{xx}(-1,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{20}$$

$$u_{xx}(-0,t) = \alpha_1 u_{xx}(+0,t), \quad u_{xxx}(+0,t) = \beta_1 u_{xxx}(-0,t), \quad t \in (0,T). \tag{21}$$

Пусть V_0 — линейное пространство,

$$V_0 = \{v(x,t) : v(x,t) \in V,\ v_{xxxx}(x,t) \in L_2(Q_1),\ v_{xxxx}(x,t) \in L_2(Q_2)\}$$

с нормой

$$\|v\|_{V_0} = \left(\|v\|_V^2 + \int\limits_{Q_1} v_{xxxx}^2\, dxdt + \int\limits_{Q_2} v_{xxxx}^2\, dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нужно показать, что регуляризированная краевая задача при фиксированном ε разрешима в пространстве V_0 для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$.

Воспользуемся методом продолжения по параметру [36, гл. III, § 14]. Возьмем число λ из отрезка $[0,1]$ и рассмотрим семейство краевых задач: найти решение уравнения (19) такое, что для него выполняются условия (2)–(4), (20), (21), а также условия

$$u(-0,t) = \lambda\alpha u(+0,t), \quad u_x(+0,t) = \lambda\beta u_x(-0,t), \quad t \in (0,T), \tag{22}$$

$$u_{xx}(-0,t) = \lambda\alpha_1 u_{xx}(+0,t), \quad u_{xxx}(+0,t) = \lambda\beta_1 u_{xxx}(-0,t), \quad t \in (0,T). \tag{23}$$

Воспользуемся далее техникой работы [21]. Заменой

$$w(x,t) = u(x,t) - \lambda\alpha(x+1)u(+0,t) - \lambda\alpha_1\left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right) u_{xx}(+0,t),\ (x,t) \in Q_1,$$

$$z(x,t) = u(x,t) - \lambda\beta(x-1)u_x(-0,t) - \lambda\beta_1\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\right) u_{xxx}(-0,t),\ (x,t) \in Q_2,$$

уравнение (19) нетрудно преобразовать в систему двух дифференциальных уравнений с «нагруженными» слагаемыми, но при этом для самих функций $w(x,t)$ и $z(x,t)$ будут выполняться однородные граничные условия, естественные для эллиптических краевых задач. Разрешимость при $\lambda = 0$ в пространстве V_0 соответствующих краевых задач имеет место, и для разрешимости этих же задач в пространстве V_0 при $\lambda \in [0,1]$ достаточно будет установить равномерную по λ оценку в $L_2(Q)$ всех слагаемых, входящих в уравнение для функций $w(x,t)$ и $z(x,t)$ (см. [36]). Искомая оценка будет иметь место, если для любых решений задачи (19), (2)–(4), (20)–(23) из пространства V_0 будет справедлива оценка

$$\|u\|_{V_0} \le N \|f\|_{L_2(Q)} \tag{24}$$

с постоянной N, определяющейся функциями $h(x)$, $a(x)$, $c(x,t)$, а также числами α и β.

Покажем,что требуемая оценка (24) действительно имеет место.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{Q_1} Lu_\varepsilon \cdot (-u)\,dxdt + \gamma \int\limits_{Q_2} Lu_\varepsilon \cdot (-u)\,dxdt = \int\limits_{Q_1} f \cdot (-u)\,dxdt + \gamma \int\limits_{Q_2} f \cdot (-u)\,dxdt.$$

Повторяя выкладки, выполненные при анализе равенства (14), и применяя неравенства Гёльдера и Юнга, а также используя неравенства (16) и условия (7)–(12) и (18), получим оценку

$$\int\limits_{Q_1} \left(D_t^{p+1} u\right)^2 dxdt + \int\limits_{Q_2} \left(D_t^{p+1} u\right)^2 dxdt + \int\limits_{Q_1} u^2\,dxdt + \int\limits_{Q_2} u^2\,dxdt$$
$$+ \varepsilon \int\limits_{Q_1} u_{xx}^2\,dxdt + \varepsilon \int\limits_{Q_2} u_{xx}^2\,dxdt \le M_1 \|f\|^2_{L_2(Q)}, \tag{25}$$

где M_1 определяется функциями $h(x)$, $a(x)$, $c(x,t)$ и числами α и β.

Теперь рассмотрим равенство

$$\int\limits_{Q_1} Lu_\varepsilon \cdot (-u_{xxxx})\,dxdt + \gamma \int\limits_{Q_2} Lu_\varepsilon \cdot (-u_{xxxx})\,dxdt$$
$$= \int\limits_{Q_1} f \cdot (-u_{xxxx})\,dxdt + \gamma \int\limits_{Q_2} f \cdot (-u_{xxxx})\,dxdt.$$

Применяя интегрирование по частям и используя условия (2)–(5), получим следующее равенство:

$$\int\limits_{Q_1} \left(D_t^{p+1} u_{xx}\right)^2 dxdt + \gamma \int\limits_{Q_2} \left(D_t^{p+1} u_{xx}\right)^2 dxdt + \int\limits_{Q_1} a(x) u_{xxx}^2\,dxdt + \gamma \int\limits_{Q_2} a(x) u_{xxx}^2\,dxdt$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_{Q_1} a''(x) u_{xx}^2\,dxdt - \frac{\gamma}{2} \int\limits_{Q_2} a''(x) u_{xx}^2\,dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_0^T a'(-0) u_{xx}^2(-0,t)\,dt$$

$$
-\frac{\gamma}{2}\int\limits_0^T a'(+0)u_{xx}^2(+0,t)\,dt+\int\limits_{Q_1}\varepsilon u_{xxxx}^2\,dxdt+\gamma\int\limits_{Q_2}\varepsilon u_{xxxx}^2\,dxdt
$$
$$
+\int\limits_{Q_1}c_x(x,t)uu_{xxx}\,dxdt+\gamma\int\limits_{Q_2}c_x(x,t)uu_{xxx}\,dxdt+\int\limits_{Q_1}c(x,t)u_xu_{xxx}\,dxdt
$$
$$
+\gamma\int\limits_{Q_2}c(x,t)u_xu_{xxx}\,dxdt+\int\limits_{Q_1}h'(x)u_{xxt}u_{xxx}\,dxdt+\gamma\int\limits_{Q_2}h'(x)u_{xxt}u_{xxx}\,dxdt
$$
$$
+\int\limits_{Q_1}f(x,t)u_{xxxx}\,dxdt+\gamma\int\limits_{Q_2}f(x,t)u_{xxxx}\,dxdt=0.
$$

Применяя неравенства Гёльдера и Юнга, а также условия (7)–(13), (16)–(18), получим оценку

$$
\int\limits_{Q_1}\left(D_t^{p+1}u_{xx}\right)^2dxdt+\int\limits_{Q_2}\left(D_t^{p+1}u_{xx}\right)^2dxdt+\int\limits_{Q_1}u_x^2\,dxdt+\int\limits_{Q_2}u_x^2\,dxdt
$$
$$
\int\limits_{Q_1}u_{xxx}^2\,dxdt+\int\limits_{Q_2}u_{xxx}^2\,dxdt+\varepsilon\int\limits_{Q_1}u_{xxxx}^2\,dxdt
$$
$$
+\varepsilon\int\limits_{Q_2}u_{xxxx}^2\,dxdt\le M_2\|f\|_{L_2(Q)}^2, \tag{26}
$$

где M_2 определяется функциями $h(x)$, $a(x)$, $c(x,t)$ и числами ε, α и β.

Следующим рассмотрим равенство

$$
\int\limits_{Q_1}Lu_\varepsilon\cdot(A-t)(-1)^p\left(D_t^{2p+2}u\right)dxdt+\gamma\int\limits_{Q_2}Lu_\varepsilon\cdot(A-t)(-1)^p\left(D_t^{2p+2}u\right)dxdt
$$
$$
=\int\limits_{Q_1}f\cdot(A-t)(-1)^p\left(D_t^{2p+2}u\right)dxdt+\gamma\int\limits_{Q_2}f\cdot(A-t)(-1)^p\left(D_t^{2p+2}u\right)dxdt,
$$

где $A>T$. Интегрируя по частям в этом равенстве и применяя условия (2)–(5), а также неравенства Гёльдера и Юнга, условия (7)–(13), (16)–(18), получим оценку

$$
\int\limits_{Q_1}\left(D_t^{2p+2}u\right)^2dxdt+\int\limits_{Q_2}\left(D_t^{2p+2}u\right)^2dxdt\le M_3\|f\|_{L_2(Q)}^2, \tag{27}
$$

где M_3 определяется функциями $h(x)$, $a(x)$, $c(x,t)$ и числами ε, α и β.

Из оценок (25)–(27) следует равномерная по параметру λ оценка (24) для всех решений $u(x,t)$ из пространства V_0 краевой задачи (2)–(4), (20)–(23) при фиксированном ε в пространстве V_0 для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$.

Покажем, что для семейства решений $u_\varepsilon(x,t)$ имеет место априорная оценка, равномерная по ε и такая, что с ее помощью можно будет осуществить предельный переход. Воспользуемся тем, что функция $f(x,t)$ имеет обобщенные производные по переменной x до второго порядка включительно, принадлежащие пространству $L_2(Q)$. Повторяя по сути доказательство оценок (26) и (27), но в правой части дополнительно интегрируя по частям, для семейства решений $u_\varepsilon(x,t)$ получим новую оценку

$$\int\limits_{Q_1}\big(D_t^{p+1}u_\varepsilon\big)^2\,dxdt+\int\limits_{Q_2}\big(D_t^{p+1}u_\varepsilon\big)^2\,dxdt+\int\limits_{Q_1}\big(D_t^{p+1}u_{\varepsilon xx}\big)^2\,dxdt$$
$$+\int\limits_{Q_2}\big(D_t^{p+1}u_{\varepsilon xx}\big)^2\,dxdt+\int\limits_{Q_1}\big(D_t^{2p+2}u_\varepsilon\big)^2\,dxdt$$
$$+\int\limits_{Q_2}\big(D_t^{2p+2}u_\varepsilon\big)^2\,dxdt+\int\limits_{Q_1}u_\varepsilon^2\,dxdt+\int\limits_{Q_2}u_\varepsilon^2\,dxdt+\int\limits_{Q_1}u_{\varepsilon x}^2\,dxdt+\int\limits_{Q_2}u_{\varepsilon x}^2\,dxdt$$
$$+\,\varepsilon\int\limits_{Q_1}u_{\varepsilon xx}^2\,dxdt+\varepsilon\int\limits_{Q_2}u_{\varepsilon xx}^2\,dxdt+\int\limits_{Q_1}u_{\varepsilon xxx}^2\,dxdt+\int\limits_{Q_2}u_{\varepsilon xxx}^2\,dxdt$$
$$+\,\varepsilon\int\limits_{Q_1}u_{\varepsilon xxxx}^2\,dxdt+\varepsilon\int\limits_{Q_2}u_{\varepsilon xxxx}^2\,dxdt$$
$$\le M_0\Bigg(\int\limits_{Q_1}f^2(x,t)\,dxdt+\int\limits_{Q_2}f^2(x,t)\,dxdt+\int\limits_{Q_1}f_{xx}^2(x,t)\,dxdt+\int\limits_{Q_2}f_{xx}^2(x,t)\,dxdt\Bigg),$$

где M_0 определяется функциями $h(x)$, $a(x)$, $c(x,t)$ и числами α, β.

Из этой оценки и рефлексивности пространства L_2 следует, что существуют последовательности $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел и функция $u(x,t)$ такие, что при $n\to\infty$ выполняется $\varepsilon_n\to 0$, $u_{\varepsilon_n}(x,t)\to u(x,t)$, $D_t^{p+1}u_{\varepsilon_n xx}(x,t)\to D_t^{p+1}u_{xx}(x,t)$, $D_t^{2p+2}u_{\varepsilon_n}(x,t)\to D_t^{2p+2}u(x,t)$ слабо в пространстве $L_2(Q)$. Таким образом, предельная функция $u(x,t)$ будет принадлежать пространству V и будет решением краевой задачи (2)–(5) из требуемого класса.

Теорема доказана.

4. Заключение

В работе получены теоремы существования и единственности регулярных решений краевой задачи с условиями Дирихле и дополнительными условиями сопряжения на внутреннем многообразии для некоторого класса дифференциальных уравнений составного типа. Изучаемые уравнения имеют модельный вид, и нетрудно будет получить результаты, аналогичные представленным выше, для более общих уравнений — например, для уравнений с дополнительными младшими производными, для уравнений со старшими коэффициентами, зависящими и от переменной t, и т. п. Краевые условия в изучаемых задачах также можно «пошевелить» — одно или оба из условий (2) можно заменить условием на производную u_x, и т. д. Наконец, коэффициенты α и β условий сопряжения (5) и (6) могут быть функциями переменной t.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Олейник О. А.* Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типов с разрывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25. С. 3–20.
2. *Ильин В. А.* О разрешимости задач Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 1. С. 28–30.
3. *Ильин В. А.* Метод Фурье для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 1. С. 21–24.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
5. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Метод потенциалов для задач Дирихле и Неймана в случае уравнения с разрывными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 1. С. 46–58.
6. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
7. *Ладыженская О. А., Ступялис Л.* Об уравнениях смешанного типа // Вестн. Ленингр. ун-та. 1967. № 18. С. 38–46.
8. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
9. *Ладыженская О. А., Ступялис Л.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 116. С. 101–136.
10. *Ступялис Л.* Краевые задачи для эллиптико-гиперболических уравнений // Тр. МИАН СССР. 1973. Т. 125. С. 211–229.
11. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1986.
12. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
13. *Рогожников А. М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волн по каждому из этих участков // Докл. АН. 2012. Т. 441, № 4. С. 449–451.
14. *Кулешов А. А.* Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня со свободным либо закрепленным правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Докл. АН. 2012. Т. 442, № 4. С. 451–454.
15. *Рогожников А. М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Докл. АН. 2012. Т. 444, № 5. С. 488–491.
16. *Смирнов И. Н.* О колебаниях, описываемых телеграфным уравнением в случае системы, состоящей из нескольких участков разной плотности и упругости // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 49, № 5. С. 643–648.
17. *Potapova S. V.* Boundary value problems for pseudoparabolic equations with a variable time direction. TWMS // J. Inequal. Pure Appl. Math. 2012. V. 3, N 1. P. 73.
18. *Кожанов А. И., Потапова С. В.* Задача Дирихле для одного класса уравнений составного типа с разрывным коэффициентом при старшей производной // Дальневост. мат. журн. 2014. Т. 14, № 1. С. 48–65.
19. *Кожанов А. И., Шарин Е. Ф.* Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка. II // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 1. С. 18–28.
20. *Кожанов А. И., Потапова С. В.* Задача сопряжения для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, со знакопостоянной функцией при старшей производной // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2015. Т. 15, № 2. С. 51–59.
21. *Кожанов А. И., Потапова С. В.* Задача сопряжения для дифференциальных уравнений нечетного порядка с двумя временными переменными и с меняющимся направлением эволюции // Докл. АН. 2017. Т. 474, № 6. С. 661–664.
22. *Кожанов А. И.* Задача сопряжения для одного класса уравнений составного типа перменного направления // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002. С. 96–109.

23. *Шубин В. В.* Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, № 1. С. 126–138.

24. *Кожанов А. И., Шарин Е. Ф.* Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Укр. мат. вiсник. 2014. Т. 11, № 2. С. 181–202.

25. *Антипин В. И.* Разрешимость краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, № 1. С. 8–15.

26. *Pyatkov S. G., Popov S. V., Antipin V. I.* On solvability of boundary value problem for kinetic operator-differential equations // Integral Equ. Operator Theory. 2014. V. 80, N 4. P. 557–580.

27. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. кн., 1998.

28. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.

29. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroup of operators. Utrecht: VSP, 2003.

30. *Hayashi N., Kaikina E. I., Naumkin P. I., Shishmarev I. A.* Asymptotic for dissipative nonlinear equations. Berlin: Springer-Verl., 2006.

31. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.

32. *Корпусов М. О.* Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М.: Либроком, 2011.

33. *Кожанов А. И.* Псевдогиперболические и гиперболические уравнения с растущими младшими членами // Вестн. Челяб. гос. ун-та. 1999. Т. 3, № 2. С. 31–47.

34. *Потапова С. В.* О разрешимости краевых задач для псевдогиперболических уравнений переменного направления времени // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, № 1. С.108–124.

35. *Кожанов А. И., Лукина Г. А.* Псевдопараболические и псевдогиперболические уравнения в нецилиндрических по временной переменной областях // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 3. С. 31–47.

36. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2007.

Поступила в редакцию 20 октября 2021 г.
После доработки 20 октября 2021 г.
Принята к публикации 26 ноября 2021 г.

Григорьева Александра Ивановна,
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
кафедра высшей математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891;
Академия наук Республики Саха (Якутия),
пр. Ленина, 33, Якутск 677891
shadrina_ai@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2021. Том 28, № 4

UDC 517.946

THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE HIGHER ORDER COMPOSITE TYPE EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

A. I. Grigorieva

Abstract: We study the Dirichlet problem for the composite type differential equations

$$D_t\left[(-1)^p D_t^{2p+1}u - h(x)u_{xx}\right] + a(x)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t)$$

in the domain $Q = \{(x,t) : x \in (-1,0) \cup (0,1),\ t \in (0,T),\ 0 < T < +\infty\}$, where $p \geq 1$ is an integer, $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, and $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$. The feature of such equations is that the coefficients $h(x)$ and $a(x)$ can have a discontinuity of the first kind when passing through the point $x = 0$. In addition to the usual Dirichlet boundary conditions, the problem under study also specifies the conjugation conditions on the line $x = 0$. Existence and uniqueness theorems are proved for regular solutions (those having all generalized Sobolev derivatives).

DOI: 10.25587/SVFU.2021.56.53.002

Keywords: differential composite type equations, the Dirichlet problem, blow-up coefficient, regular solution, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. *Oleinik O. A.*, “Boundary value problems for linear equations of elliptic and parabolic type with discontinuous coefficients,” Izv. AN USSR. Ser. Math, **25**, 3–20 (1961).
2. *Il’in V. A.*, “On the solvability of the Dirichlet and Neumann problems for a linear elliptic operator with discontinuous coefficients,” Sov. Math., Dokl., **2**, 228–231 (1961).
3. *Il’in V. A.*, “The Fourier method for a hyperbolic equation with discontinuous coefficients,” Sov. Math., Dokl., **3**, 12–16 (1962).
4. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Uraltseva N. N.*, Linear and Quasilinear Parabolic Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1967).
5. *Ilyin V. A. and Shishmarev I. A.*, “Potential method for the Dirichlet and Neumann problems in the case of equations with discontinuous coefficients,” Sib. Math. J., **2**, No. 1, 46–58 (1961).
6. *Bitsadze A. V.*, Equations of Mixed Type [in Russian], Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow (1959).
7. *Ladyzhenskaya O. A. and Stupyalis L.*, “About mixed type equations [in Russian],” Vestn. Leningrad. Gos. Univ., No. 18, 38–46 (1967).
8. *Smirnov M. M.*, Mixed Type Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1970).
9. *Ladyzhenskaya O. A. and Stupyalis L.*, “Boundary value problems for mixed type equations,” Tr. MIAN USSR, **116**, 101–136 (1971).
10. *Stupyalis L.*, “Boundary value problems for for elliptic-hyperbolic equations,” Tr. MIAN USSR, **125**, 211–229 (1973).
11. *Juraev T. D.*, Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types [in Russian], Fan, Tashkent (1986).

12. *Moiseev E. I.*, Mixed Type Equations with a Spectral Parameter [in Russian], Izdat. Moskov. Univ., Moscow (1988).

13. *Rogozhnikov A. M.*, “Study of a mixed problem describing the oscillations of a rod consisting of several segments with arbitrary lengths,” Dokl. Math., **85**, No. 3, 399–402 (2012).

14. *Kuleshov A. A.*, “Mixed problems for the equation of longitudinal vibrations of a heterogeneous rod and for the equation of transverse vibrations of a heterogeneous string consisting of two segments with different densities and elasticities,” Dokl. Math., **85**, No. 1, 98–101 (2012).

15. *Rogozhnikov A. M.*, “Study of the mixed problem, describing the process of shaft vibrations, consisting of several sections with arbitrary lengths,” Dokl. Math., **444**, No. 5, 488–491 (2012).

16. *Smirnov I. N.*, “Oscillations described by the telegraph equation for a system consisting of several sections of different density and elasticity [in Russian],” Differ. Equ., **49**, No. 5, 643–648 (2012).

17. *Potapova S. V.*, “Boundary value problems for pseudoparabolic equations with a variable time direction. TWMS,” J. Inequalities Pure Appl. Math., **3**, No. 1, 73 (2012).

18. *Kozhanov A. I. and Potapova S. V.*, “The Dirichlet problem for a class of composite equations type with a discontinuous coefficient of the highest derivative [in Russian],” Dalnevost. Math. J., **14**, No. 1, 48–65 (2014).

19. *Kozhanov A. I. and Sharin E. F.*, “A conjugate problem for some higher order nonclassical equations, II [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **21**, No. 1, 18–28 (2014).

20. *Kozhanov A. I. and Potapova S. V.*, “Conjugate problem for a third order equation with multiple characteristics and a positive function at the higher order derivative,” J. Math. Sci., New York, **215**, No. 4, 510–516 (2016).

21. *Kozhanov A. I. and Potapova S. V.*, “Transmission problem for odd-order differential equations with two time variables and a varying direction of evolution,” Dokl. Math., **95**, No. 3, 267–269 (2017).

22. *Kozhanov A. I.*, “A conjugation problem for a class of composite-type equations of variable direction [in Russian],” in: Nonclassical Equations of Mathematical Physics, pp. 96–109, Izdat. Sobolev Inst. Mat., Novosibirsk (2002).

23. *Shubin V. V.*, “Boundary problems for third-order equations with discontinuous coefficients [in Russian],” Vestn. Novosib. Gos. Univ., **12**, No. 1, 126–138 (2012).

24. *Kozhanov A. I. and Sharin E. F.*, “A conjugation problem for some nonclassical differential equations of higher order [in Russian],” Ukr. Mat. Vestn., **11**, No. 2, 181–202 (2014).

25. *Antipin V. I.*, “The solvability of the boundary value problem for a third-order equation with changing time direction [in Russian],” Mat. Zametki YaGU, **18**, No. 1, 8–15 (2011).

26. *Pyatkov S. G., Popov S. V., and Antipin V. I.*, “On solvability of boundary value problem for kinetic operator-differential equations,” Integral Equ. Oper. Theory, **80**, No. 4, 557–580 (2014).

27. *Demidenko G. V.*, Equations and Systems Which Are Not Solved With Respect To Higher Derivative [in Russian], Nauch. Kniga, Novosibirsk (1998).

28. *Kozhanov A. I.*, Composite Type Equations and Inverse Problems, VSP, Utrecht (1999).

29. *Sviridyuk G. A.*, Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroup of Operators, VSP, Utrecht (2003).

30. *Hayashi N., Kaikina E. I., Naumkin P. I., and Shishmarev I. A.*, Asymptotic for Dissipative Nonlinear Equations, Springer (2006).

31. *Sveshnikov A. G., Al'shin A. B., Korpusov M. O., and Pletner Yu. D.*, Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2007).

32. *Korpusov M. O.*, Blow-up in Non-Classical Non-Local Equations [in Russian], Librokom, Moscow (2011).

33. *Kozhanov A. I.*, “Pseudo-hyperbolic and hyperbolic equations with growing lower terms [in Russian],” Vestn. Chelyab. Gos. Univ., **3**, No. 5, 31–47 (1999).

34. *Potapova S. V.*, “Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a varying time direction [in Russian],” Mat. Zametki YaGU, **18**, No. 1, 108–124 (2011).

35. *Kozhanov A. I. and Lukina G. A.*, “Pseudoparabolic and pseudohyperbolic equations in noncylindrical time domains [in Russian],” Mat. Zametki SVFU, **26**, No. 3, 31–47 (2019).

36. *Trenogin V. A.*, Functional Analysis [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2007).

Submitted October 20, 2021
Revised October 20, 2021
Accepted November 26, 2021

Aleksandra I. Grigorieva
Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677000, Russia;
Academy of Sciences of the Republic of Sakha (Yakutia),
33 Lenin Avenue, Yakutsk 677000, Russia
shadrina_ai@mail.ru