

ВЫРОЖДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А. И. Кожанов, Г. А. Лукина

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений

$$\varphi(t)u_t + (-1)^m \psi(t) D_x^{2m+1} u + c(x, t)u = f(x, t),$$

$$\varphi(t)u_{tt} + (-1)^{m+1} \psi(t) D_x^{2m+1} u + c(x, t)u = f(x, t),$$

в которых $x \in (0, 1)$, $t \in (0, T)$, m — целое неотрицательное число, $D_x^k = \frac{\partial^k}{\partial x^k}$ ($D_x^1 = D_x$), функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ неотрицательны и обращаются в нуль в некоторых точках отрезка $[0, T]$. Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений (решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение).

DOI: 10.25587/SVFU.2021.91.97.002

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с кратными характеристиками, вырождение, краевые задачи, регулярные решения, существование, единственность.

Введение

В настоящей работе изучается разрешимость в пространствах Соболева краевых задач для дифференциальных уравнений

$$\varphi(t)u_t + (-1)^m \psi(t) D_x^{2m+1} u + c(x, t)u = f(x, t), \quad (*)$$

$$\varphi(t)u_{tt} + (-1)^{m+1} \psi(t) D_x^{2m+1} u + c(x, t)u = f(x, t), \quad (**)$$

в которых m — целое неотрицательное число, D_x^k — частная производная $\frac{\partial^k}{\partial x^k}$ ($D_x^1 = D_x$), функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ неотрицательные и могут обращаться в нуль.

Дифференциальные уравнения (*) и (**) в случае строго положительных функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ в литературе в последнее время называют *уравнениями с кратными характеристиками* [1]. Заметим, что в класс уравнений (*) входит линейаризованное уравнение Кортевега — де Вриза [2]. Различные краевые задачи для уравнений (*) и (**), а также их нелинейных аналогов в случае, когда функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ не обращаются в нуль, изучены достаточно хорошо (см. [3–12]).

Вырождающиеся уравнения (*) изучались в [13, 14]. В этих работах было установлено, что при выполнении некоторых условий, одним из которых было условие дифференцируемости функции $\varphi(t)$ при наличии вырождения при производной по времени, т. е. при обращении коэффициента $\varphi(t)$ в нуль при $t = 0$, для уравнений (*) будет корректной задача без задания начального условия. В настоящей работе показано, что для уравнений (*) при выполнении условия $\varphi(0) = 0$ корректной может быть естественная начально-краевая задача с заданием обычных начальных условий; более того, будет показано, что корректность естественных краевых задач для уравнений (*) имеет место и без условия существования производной у функции $\varphi(t)$.

Что касается уравнений (**), то здесь также будет показано, что для них корректна задача без освобождения начального или конечного многообразий от несения граничных данных, и при этом условие дифференцируемости функции $\varphi(t)$ вновь требоваться не будет.

Настоящая работа состоит из двух частей. В первой из них изучается разрешимость краевых задач для уравнений (*) и (**) в прямоугольной области, во второй описаны некоторые усиления и обобщения полученных в первой части результатов.

Уточним, что целью настоящей работы является доказательство разрешимости изучаемых краевых задач в классах регулярных решений, т. е. решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

1. Разрешимость краевых задач для дифференциальных уравнений с кратными характеристиками в прямоугольной области

Обозначим через Ω интервал $(0,1)$ оси Ox , через Q — прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$. Пусть $c(x, t)$, $f(x, t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$, m — фиксированное неотрицательное целое число.

Краевая задача I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$\varphi(t)u_t + (-1)^m \psi(t) D_x^{2m+1} u + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1.1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$D_x^k u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad t \in (0, T), \quad k = 0, \dots, m, \quad (3.1)$$

$$D_x^k u(x, t)|_{x=1} = 0, \quad t \in (0, T), \quad k = 0, \dots, m-1. \quad (4.1)$$

Краевая задача II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются условия (2.1) и (3.1), а также условия

$$D_x^k u(x, t)|_{x=1} = 0, \quad t \in (0, T), \quad k = m + 1, \dots, 2m. \quad (5.1)$$

Краевая задача III. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$\varphi(t)u_{tt} + (-1)^{m+1}\psi(t)D_x^{2m+1}u + c(x, t)u = f(x, t) \quad (6.1)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.1)–(4.1), а также условие

$$u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (7.1)$$

Краевая задача IV. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (6.1) и такую, что для нее выполняются условия (2.1), (3.1), (5.1) и (7.1).

Ниже в работе будут использоваться анизотропные пространства Соболева $W_2^{k,l}(Q)$ (k, l — натуральные числа). Определения этих пространств можно найти в [12, 15, 16].

Теорема 1.1. Пусть выполняются условия

$$\varphi(t) \in C([0, T]), \quad \varphi(t) > 0 \text{ при } t \in [0, T], \quad \varphi(0) = 0; \quad (8.1)$$

$$\psi(t) \in C([0, T]), \quad \psi(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0, T]; \quad (9.1)$$

$$[\varphi(t)]^{-1}\psi(t) \in L_2([0, T]); \quad (10.1)$$

$$c(x, t) \equiv c(t), \quad c(t) \in C([0, T]), \quad c(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0, T]; \quad (11.1)$$

$$c(t) = c_1(t) + c_2(t), \quad [\varphi(t)]^{-1}c_1(t) \in L_2([0, T]), \quad t^{\frac{1}{2}}[\varphi(t)]^{-1}c_2(t) \in L_2([0, T]),$$

$$\|t^{\frac{1}{2}}[\varphi(t)]^{-1}c_2(t)\|_{L_2([0, T])} < 1. \quad (12.1)$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что

$$[\varphi(t)]^{-1}D_x^k f(x, t) \in L_2(Q), \quad k = 0, \dots, 2m + 1,$$

$$D_x^k f(x, t) = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad t \in (0, T), \quad k = 0, \dots, m,$$

$$D_x^k f(x, t) = 0 \quad \text{при } x = 1, \quad t \in (0, T), \quad k = 0, \dots, m - 1,$$

краевая задача I имеет решение, принадлежащее пространству $W_2^{2m+1,1}(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом регуляризации. Пусть $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^\infty$ — последовательность положительных чисел, монотонно сходящаяся к нулю, $\varphi_l(t)$ — функция $\varphi(t) + \varepsilon_l$. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$\varphi_l(t)u_t + (-1)^m\psi(t)D_x^{2m+1}u + c(t)u - \varepsilon_l\varphi_l(t)D_x^{2(2m+1)}u = f(x, t) \quad (13.1)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.1)–(4.1), а также условия

$$D_x^k u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad t \in (0, T), \quad k = 2m + 1, \dots, 3m, \quad (14.1)$$

$$D_x^k u(x, t)|_{x=1} = 0, \quad t \in (0, T), \quad k = 2m + 1, \dots, 3m + 1. \quad (15.1)$$

В этой задаче уравнение (13.1) представляет собой параболическое уравнение без вырождения, краевые условия (3.1), (4.1), (14.1) и (15.1) дают самосопряженную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$v^{(4m+2)}(x) = F(x).$$

Следовательно, существует функция $u_l(x, t)$, принадлежащая $W_2^{2(2m+1),1}(Q)$, являющаяся в прямоугольнике Q решением уравнения (13.1) и такая, что для нее выполняются условия (2.1) – (4.1), (14.1) и (15.1) (см. [17]). Покажем, что для семейства $\{u_l(x, t)\}_{l=1}^\infty$ имеют место условия, необходимые для осуществления в уравнении (13.1) предельного перехода при $l \rightarrow \infty$.

Умножим уравнение (13.1) на функцию $-\varphi_l(t)^{-1} D_x^{2(2m+1)} u_l(x, t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику $(0, 1) \times (0, t^*)$, $0 < t^* \leq T$. После несложных преобразований с использованием условий (8.1)–(11.1), а также условий на функцию $f(x, t)$, нетрудно получить первую априорную оценку

$$\int_{\Omega} [D_x^{2m+1} u_l(x, t^*)]^2 dx + \varepsilon_l \int_0^{t^*} \int_{\Omega} [D_x^{2(2m+1)} u_l(x, t)]^2 dx dt \leq N_1, \quad (16.1)$$

постоянная N_1 в которой определяется функциями $f(x, t)$ и $\varphi(t)$, а также числом T .

На следующем шаге умножим уравнение (13.1) на функцию $[\varphi_l(t)]^{-1} u_{lt}(x, t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q . Получим равенство

$$\begin{aligned} \int_Q u_{lt}^2 dx dt &= (-1)^{m+1} \int_Q \frac{\psi(t)}{\varphi_l(t)} D_x^{2m+1} u_l u_{lt} dx dt + \frac{\varepsilon_l}{2} \int_{\Omega} [D_x^{2m+1} u_l(x, T)]^2 dx \\ &\quad - \int_Q \frac{c_1(t)}{\varphi_l(t)} u u_t dx dt - \int_Q \frac{c_2(t)}{\varphi_l(t)} u u_t dx dt + \int_Q \frac{f(x, t)}{\varphi_l(t)} u_t dx dt. \end{aligned} \quad (17.1)$$

В этом равенстве первое, второе, третье и пятое слагаемые правой части оцениваются с помощью неравенства Юнга и неравенства (16.1) величиной

$$\delta \int_Q u_{lt}^2 dx dt + C(\delta)$$

с произвольным положительным числом δ и числом $C(\delta)$, определяющимся также функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $f(x, t)$, $c_1(t)$ и числом T . Далее, для четвертого сла-

гаемого имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_Q \frac{c_2(t) u_l u_{lt}}{\varphi_l(t)} dx dt \right| &\leq \left(\int_Q u_{lt}^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \frac{c_2^2(t)}{\varphi_l^2(t)} \left(\int_\Omega u_l^2 dx \right) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_Q u_{lt}^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \frac{t c_2^2(t)}{\varphi_l^2(t)} \left(\int_0^t \int_\Omega u_{l\tau}^2 dx d\tau \right) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_Q u_{lt}^2 dx dt \left(\int_0^T \frac{t c_2^2(t)}{\varphi_l^2(t)} dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Учитывая условие (12.1) и подбирая число δ малым, получим, что следствием равенства (17.1) будет вторая априорная оценка

$$\int_Q u_{lt}^2 dx dt \leq N_2, \quad (18.1)$$

постоянная N_2 в которой определяется функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $f(x, t)$, $c(t)$ и числом T .

Оценок (16.1) и (18.1) вполне достаточно для доказательства разрешимости краевой задачи I. Действительно, из этих оценок и из свойства рефлексивности гильбертова пространства [18] следует, что существуют последовательность $\{u_{l_k}(x, t)\}_{k=1}^\infty$ решений задач (13.1), (2.1)–(4.1), (14.1), (15.1), а также функция $u(x, t)$ такие, что имеют место сходимости

$$u_{l_k}(x, t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u(x, t) \quad \text{слабо в пространстве } W_2^{2m+1,1}(Q),$$

$$\varepsilon_{l_k} \varphi_{l_k}(t) D_x^{2(2m+1)} u_{l_k}(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{слабо в пространстве } L_2(Q).$$

Очевидно, что предельная функция $u(x, t)$ принадлежит $W_2^{2m+1,1}(Q)$ и для нее выполняются уравнение (1.1) и краевые условия (2.1)–(4.1).

Теорема доказана.

Положим

$$V_1 = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_\infty(0, T, W_2^{2m+1}(\Omega)), v_t(x, t) \in L_2(Q)\}.$$

Теорема 2.1. Пусть выполняются условия (8.1)–(10.1), а также условие

$$c(x, t) \equiv c(t), \quad c(t) \in C([0, T]), \quad c(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0, T], \quad t^{\frac{1}{2}}[\varphi(t)]^{-1}c(t) \in L_2([0, T]). \quad (19.1)$$

Тогда краевая задача I не может иметь в пространстве V_1 более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — два решения из пространства V_1 краевой задачи I. Обозначим $w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$. Заметим, что

вследствие принадлежности функций $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ пространству V_1 , а также вследствие условий (10.1) и (19.1) имеют место включения

$$[\varphi(t)]^{-1}\psi(t)w(x, t) \in L_2(Q), \quad [\varphi(t)]^{-1}c(t)w(x, t) \in L_2(Q).$$

Отсюда следует, что для функции $w(x, t)$ выполняется уравнение

$$w_t + (-1)^m [\varphi(t)]^{-1}\psi(t)D_x^{2m+1}w + [\varphi(t)]^{-1}c(t)w = 0.$$

Умножим это уравнение на функцию $w(x, t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику $(0, 1) \times (0, t^*)$. Используя условия теоремы, получим, что имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} w^2(x, t^*) dx \leq 0.$$

Вследствие произвольности числа t^* получим $w(x, t) \equiv 0$ в Q . А это и означает, что краевая задача I не может иметь в пространстве V_1 более одного решения.

Теорема доказана.

Для краевой задачи II имеют место результаты, вполне аналогичные представленным выше.

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия (8.1)–(12.1). Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что

$$[\varphi(t)]^{-1}D_x^k f(x, t) \in L_2(Q), \quad k = 0, \dots, 2m+1,$$

$$D_x^k f(x, t) = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad t \in (0, T), \quad k = 0, \dots, m,$$

$$D_x^k f(x, t) = 0 \quad \text{при } x = 1, \quad t \in (0, T), \quad k = m+1, \dots, 2m,$$

краевая задача II имеет решение, принадлежащее пространству $W_2^{2m+1,1}(Q)$.

Теорема 4.1. Пусть выполняются условия (8.1)–(10.1), (19.1). Тогда краевая задача II не может иметь в пространстве V_1 более одного решения.

Доказательство теорем 3.1 и 4.1 проводится вполне аналогично доказательству теорем 1.1 и 1.2. Уточним лишь, что при доказательстве теоремы 3.1 вновь используется дифференциальное уравнение (13.1), но при этом вместо условия (15.1) во вспомогательной регуляризованной задаче используется условие

$$D_x^k u(x, t)|_{x=1} = 0, \quad t \in (0, T), \quad k = 3m+1, \dots, 4m+1. \quad (20.1)$$

Перейдем к исследованию разрешимости краевых задач III и IV.

Теорема 5.1. Пусть выполняются условия (8.1) и (9.1), а также условия

$$t^{\frac{1}{2}}[\varphi(t)]^{-1}\psi(t) \in L_2([0, T]); \quad (21.1)$$

$$c(x, t) \equiv c(t), \quad c(t) \in C([0, T]), \quad c(t) \geq 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \quad t^{\frac{1}{2}}[\varphi(t)]^{-1}c(t) \in L_2([0, T]). \quad (22.1)$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что

$$[\varphi(t)]^{-1} D_x^k f(x, t) \in L_2(Q), \quad k = 0, \dots, 2m+1,$$

$$D_x^k f(x, t) = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad t \in (0, T), \quad k = 0, \dots, m,$$

$$D_x^k f(x, t) = 0 \quad \text{при } x = 1, \quad t \in (0, T), \quad k = 0, \dots, m-1,$$

краевая задача III имеет решение, принадлежащее пространству $W_2^{2m+1,2}(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вновь воспользуемся методом регуляризации. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$\varphi_l(t) u_{tt} + (-1)^{m+1} \psi(t) D_x^{2m+1} u + c(x, t) u + \varepsilon_l \varphi_l(t) D_x^{2(2m+1)} u = f(x, t) \quad (23.1)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.1)–(4.1), (7.1), (14.1) и (15.1). Данная задача имеет решение $u_l(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2(2m+1),2}(Q)$ (см. [17]). Покажем, что для семейства $\{u_l(x, t)\}_{l=1}^\infty$ имеют место равномерные по l априорные оценки.

Умножим уравнение (23.1) на функцию $[\varphi_l(t)]^{-1} D_x^{2(2m+1)} u_l(x, t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q . После несложных преобразований с использованием условий (8.1), (9.1) и (22.1) получим, что имеет место первая априорная оценка

$$\int_Q [D_x^{2m+1} u_{lt}]^2 dx dt + \varepsilon_l \int_Q [D_x^{2(2m+1)} u_l]^2 dx dt \leq N_3 \quad (24.1)$$

с постоянной N_3 , определяющейся лишь функциями $f(x, t)$ и $\varphi(t)$.

На следующем шаге умножим уравнение (23.1) на функцию $[\varphi_l(t)]^{-1} u_{l,tt}(x, t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q . Получим равенство

$$\begin{aligned} \int_Q u_{l,tt}^2 dx dt + \varepsilon_l \int_Q [D_x^{2m+1} u_{lt}]^2 dx dt &= (-1)^m \int_Q \frac{\psi(t)}{\varphi_l(t)} D_x^{2m+1} u_l u_{l,tt} dx dt \\ &\quad - \int_Q \frac{c(t)}{\varphi_l(t)} u_l u_{l,tt} dx dt + \int_Q \frac{f(x, t)}{\varphi_l(t)} u_{l,tt} dx dt = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (25.1)$$

Для интеграла I_1 имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{\delta^2}{2} \int_Q u_{l,tt}^2 dx dt + \frac{1}{2\delta^2} \int_Q \frac{\psi^2(t)}{\varphi_l^2(t)} (D_x^{2m+1} u_l)^2 dx dt \\ &\leq \frac{\delta^2}{2} \int_Q u_{l,tt}^2 dx dt + \frac{1}{2\delta^2} \int_0^T \frac{t\psi^2(t)}{\varphi_l^2(t)} \left(\int_0^t \int_\Omega (D_x^{2m+1} u_{l,\tau})^2 dx d\tau \right) dt \\ &\leq \frac{\delta^2}{2} \int_Q u_{l,tt}^2 dx dt + \frac{N_3}{2\delta^2} \int_0^T \frac{t\psi^2(t)}{\varphi_l^2(t)} dt \end{aligned}$$

(здесь δ — произвольное положительное число). Аналогичные неравенства имеют место и для интеграла I_2 , интеграл же I_3 просто оценивается сверху с помощью неравенства Юнга величиной

$$\frac{\delta^2}{2} \int_Q u_{tt}^2 dxdt + \frac{1}{2\delta^2} \int_Q \frac{f^2}{\varphi_l^2(t)} dxdt.$$

Подбирая число δ малым, получим, что следствием равенства (25.1) будет априорная оценка

$$\int_Q u_{tt}^2 dxdt \leq N_4, \quad (26.1)$$

постоянная N_4 в которой определяется функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $f(x, t)$ и $c(t)$.

Оценок (24.1) и (26.1) достаточно для доказательства теоремы. Действительно, из оценок (24.1) и (26.1) следует, что существует последовательность $\{u_{l_k}(x, t)\}_{k=1}^\infty$, слабо сходящаяся в пространстве $W_2^{2m+1,2}(Q)$ и такая, что

$$\varepsilon_{l_k} \varphi_{l_k}(t) D_x^{2(2m+1)} u_{l_k}(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{слабо в пространстве } L_2(Q).$$

Предельная функция $u(x, t)$ и будет требуемым решением краевой задачи III.

Определим пространство V_2 :

$$V_2 = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(0, T, W_2^{2m+1}(\Omega)), \\ v_t(x, t) \in L_2(0, T, W_2^{2m+1}(\Omega)), v_{tt}(x, t) \in L_2(Q)\}.$$

Теорема 6.1. Пусть выполняются условия (8.1), (9.1), (21.1), (22.1). Тогда краевая задача III не может иметь в пространстве V_2 более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для разности $w(x, t)$ двух возможных решений краевой задачи III имеют место включения

$$[\varphi(t)]^{-1} \psi(t) D_x^{2m+1} w(x, t) \in L_2(Q), \quad [\varphi(t)]^{-1} c(t) w(x, t) \in L_2(Q).$$

Отсюда следует, что имеет место равенство

$$w_{tt} + (-1)^{m+1} [\varphi(t)]^{-1} \psi(t) D_x^{2m+1} w + [\varphi(t)]^{-1} c(t) w = 0.$$

Умножая это равенство на функцию $w(x, t)$ и интегрируя по прямоугольнику Q , используя далее условия теоремы, получим, что $w(x, t)$ — тождественно нулевая в Q функция. А это и означает, что краевая задача III не может иметь в пространстве V_2 более одного решения.

Теорема доказана.

Для краевой задачи IV имеют место аналогичные теоремам 5.1 и 6.1 теоремы существования и единственности. Уточним лишь, что краевая задача IV будет разрешима в пространстве $W_2^{2m+1,2}(Q)$ при выполнении условий (8.1), (9.1), (21.1), (22.1) для функций $f(x, t)$, для которых выполняются условия теоремы 3.1.

2. Замечания и дополнения

В настоящем разделе описаны некоторые усиления и обобщения представленных выше результатов.

1.2. Прежде всего заметим, что условиями теорем 1.1–6.1 допускается обращение функции $\psi(t)$ в нуль в произвольных точках отрезка $[0, T]$. Если же функция $\varphi(t)$ обращается в нуль в каких-либо точках, отличных от точки $t = 0$, то и в этом случае с помощью используемой в п. 1 техники также нетрудно будет определить необходимые условия и получить теоремы существования и единственности решений.

2.2. Уточним, что все представленные в п. 1 (с учетом замечания 1.2) результаты о разрешимости краевых задач I и II новые по сравнению с результатами из [14].

3.2. Приведем еще один пример задачи, разрешимость которой нетрудно будет установить с помощью техники, представленной в п. 1. Ограничимся уравнением (1.1) в случае $m = 1$.

Краевая задача. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$\varphi(t)u_t - \psi(t)D_x^3 u + c(t)u = f(x, t) \quad (1.2)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.2)$$

$$u_x(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (3.2)$$

$$u(1, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (4.2)$$

Для доказательства разрешимости этой задачи воспользуемся вновь методом регуляризации. Именно, рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$\varphi_l(t)u_t - \psi(t)D_x^3 u + c(t)u - \varepsilon_l \varphi_l(t)D_x^6 u = f(x, t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.2)–(4.2), а также условия

$$D_x^5 u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad D_x^3 u(x, t)|_{x=1} = D_x^4 u(x, t)|_{x=1} = 0, \quad 0 < t < T.$$

Эта задача имеет решение $u_l(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^{6,1}(Q)$. Далее, для семейства $\{u_l(x, t)\}_{l=1}^\infty$ справедливы оценки (16.1) и (18.1). Этих оценок вполне достаточно для выбора подпоследовательности, сходящейся к регулярному решению краевой задачи (1.2)–(4.2).

Для уравнения (6.1) в случае $m = 1$ также нетрудно, используя регуляризацию и априорные оценки, получить существование регулярных решений краевой задачи с граничными условиями (3.2) и (4.2).

4.2. Коэффициенты уравнений (1.1) и (6.1) вполне могут зависеть и от переменной x . Количество условий и выкладок при зависимости коэффициентов от x существенно увеличится, суть же теорем существования и единственности – нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джурев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1986.
2. Додд Р., Эйлбек Дж., Гибсон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые явления. М.: Мир, 1988.
3. Бубнов Б. А. Общие краевые задачи для уравнения Кортевега — де Фриза в ограниченной области // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 26–31.
4. Хаблов В. В. О некоторых корректных постановках граничных задач для уравнения Кортевега — де Фриза. Препринт. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1979.
5. Абдиназаров С. Общие краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 1. С. 1–12.
6. Konig C. E., Ponce G., Vega L. Well-posedness of the initial value problem for Korteweg-de Vries equation // J. Amer. Math. Soc. 1991. V. 4. P. 323–347.
7. Кожанов А. И. О разрешимости нелокальной по времени задачи для одного уравнения с кратными характеристиками // Мат. заметки ЯГУ. 2001. Т. 8, вып. 2. С. 27–40.
8. Larkin N. A. Korteweg–de Vries and Kuramoto–Sivashinsky equations in bounded domains // J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 297, N 2. P. 169–185.
9. Faminski A. V., Larkin N. A. Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed in bounded interval // Electron. J. Differ. Equ. 2010. V. 2010, N 1. P. 1–20.
10. Larkin N. A., Luchesi J. General mixed problems for the KDV equations on bounded intervals // Electron. J. Differ. Equ. 2010. V. 2010, N 168. P. 1–17.
11. Лукина Г. А. Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега — де Фриза // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2011. Вып. 8, № 17. С. 53–62.
12. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Вычисл. центр СО РАН, 1995.
13. Кожанов А. И., Лукина Г. А. Нелокальные краевые задачи с частично интегральными условиями для вырождающихся дифференциальных уравнений с кратными характеристиками // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2017. Т. 17, № 3. С. 37–52.
14. Кожанов А. И., Зикиров О. С. Краевые задачи для дважды вырождающегося дифференциального уравнения с кратными характеристиками // Мат. заметки СВФУ. 2018. Т. 25, № 4. С. 34–44.
15. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
16. Triebel H. Interpolation theory. Functional spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutscher Verl. Wiss., 1978.
17. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.
18. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 19 мая 2021 г.

После доработки 19 мая 2021 г.

Принята к публикации 26 августа 2021 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Академия наук Республики Саха (Якутия),
ул. Ленина, 33, Якутск 677007, Россия
kozhanov@math.nsc.ru

Лукина Галина Александровна
Политехнический институт (филиал) ФГАОУ ВО
«Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова» в г. Мирном,
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678175, Республика Саха (Якутия), Россия
lukina-g@mail.ru

DEGENERATION IN DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS
A. I. Kozhanov and G. A. Lukina

Abstract: We study the solvability of boundary value problems for the differential equations

$$\begin{aligned}\varphi(t)u_t + (-1)^m \psi(t) D_x^{2m+1} u + c(x, t)u &= f(x, t), \\ \varphi(t)u_{tt} + (-1)^{m+1} \psi(t) D_x^{2m+1} u + c(x, t)u &= f(x, t),\end{aligned}$$

where $x \in (0, 1)$, $t \in (0, T)$, m is a non-negative integer, $D_x^k = \frac{\partial^k}{\partial x^k}$ ($D_x^1 = D_x$), while the functions $\varphi(t)$ and $\psi(t)$ are non-negative and vanish at some points of the segment $[0, T]$. We prove the existence and uniqueness theorems for the regular solutions, those having all generalized Sobolev derivatives required in the equation, in the inner subdomains.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.91.97.002

Keywords: differential equations with multiple characteristics, degeneration, boundary value problem, regular solution, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Dzhuraev T. D., Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types [in Russian], FAN, Tashkent (1986).
2. Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., and Morris H. C., Solitons and Nonlinear Wave Equations, Acad. Press, London (1982).
3. Bubnov B. A., “Generalized boundary value problems for the Korteweg–de Vries equation in bounded domain,” Differ. Equ., **15**, 17–21 (1979).
4. Khablov V. V., “On some well-posed statements of boundary-value problems for the Korteweg–de Vries equation [in Russian],” Preprint, IM SO AN SSSR, Novosibirsk (1979).
5. Abdinazarov S., “General boundary value problems for an equation of third order with multiple characteristics,” Differ. Equ., **17**, 3–12 (1981).
6. König C. E., Ponce G., and Vega L., “Well-posedness of the initial value problem for Korteweg–de Vries equation,” J. Amer. Math. Soc., **4**, 323–347 (1991).
7. Kozhanov A. I., “On the solvability of a nonlocal time problem for an equation with multiple characteristics [in Russian],” Mat. Zamet. YAGU, **8**, No. 2, 27–40 (2001).
8. Larkin N. A., “Korteweg–de Vries and Kuramoto–Sivashinsky equation in bounded domains,” J. Math. Anal. Appl., **297**, No. 2, 169–185 (2004).
9. Faminski A. V. and Larkin N. A., “Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed in bounded interval,” Electron. J. Differ. Equ., **2010**, No. 1, 1–20 (2010).
10. Larkin N. A. and Luchesi J., “General mixed problems for the KDV equations on bounded intervals,” Electron. J. Differ. Equ., **2010**, No. 168, 1–17 (2010).
11. Lukina G. A., “Boundary value problems with integral conditions for the linearized Korteweg–de Vries equation [in Russian],” Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model. Program., **17**, No. 8, 53–62 (2011).
12. Egorov I. E. and Fedorov V. E., High-Order Non-Classical Equations of Mathematical Physics [in Russian], Vychisl. Tsentr SO RAN, Novosibirsk (1995).

13. Kozhanov A. I. and Lukina G. A., “Nonlocal boundary-value problems with partially integral conditions for degenerate differential equations with multiple characteristics,” J. Math. Sci., **237**, No. 4, 549–562 (2019).
14. Kozhanov A. I. and Zikirov O. S., “Boundary value problems for twice degenerate differential equations with multiple characteristics [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **25**, No. 4, 34–44 (2018).
15. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Uraltseva N. N., Linear and Quasilinear Parabolic Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1967).
16. Triebel H., Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, VEB Deutscher Verl. Wiss., Berlin (1978).
17. Jakubov S. Ya., Linear Differential-Operator Equations and Their Applications [in Russian], Elm, Baku (1985).
18. Trenogin V. A. Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).

Submitted May 19, 2021

Revised May 19, 2021

Accepted August 26, 2021

Aleksandr I. Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
Academy of Science of the Republic of Sakha (Yakutia),
33 Lenin Avenue, Yakutsk 677007, Russia
`kozhanov@math.nsc.ru`

Galina A. Lukina
Ammosov North-Eastern Federal University,
Mirny Polytechnic Institute,
5/1 Tikhonov Street, Mirny 678175, Russia
`lukina-g@mail.ru`