

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА САМАРСКОГО —  
ИОНКИНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА  
С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ ОПЕРАТОРОМ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СТАРШЕЙ ЧАСТИ

А. И. Кожанов, Д. С. Хромченко

**Аннотация.** Для дифференциальных уравнений составного типа с вырождающимся оператором теплопроводности в старшей части изучаются задачи, близкие по постановке к известной задаче Самарского — Ионкина. Целью работы является доказательство существования и единственности регулярных решений этих задач.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-4-35-48

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения составного типа, нелокальные задачи, обобщенное условие Самарского — Ионкина, регулярные решения, существование, единственность.

Введение

Задача Самарского — Ионкина [1–3] представляет собой пространственно-нелокальную задачу для одномерного уравнения теплопроводности. Особенностью этой задачи является то, что даже в простейшем случае соответствующая спектральная задача не является самосопряженной и ее собственные функции не образуют базиса в пространстве  $L_2$ . В работах [1, 2] для исследования модельной задачи (задачи Ионкина) был предложен метод разложения решения по специальной биортогональной системе функций и была установлена разрешимость задачи, т. е. установлены существование, единственность и устойчивость решений. Метод [1, 2] в дальнейшем неоднократно применялся для исследования близких по постановке задач [4–10]. Однако сам по себе этот метод имеет очевидный недостаток — его можно применять лишь для уравнений, допускающих разделение переменных.

Новые методы исследования разрешимости задачи Ионкина и близких к ней задач предложены в работах [11–13]. В работе [11] разрешимость задачи Ионкина устанавливалась с помощью специальных априорных оценок, но

---

Работа выполнена в рамках госзадания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2022-0008.

при этом полученное решение принадлежало некоторому весовому соболевскому пространству. В работе [12] (см, также [14]) был предложен подход, использующий четность коэффициентов уравнения теплопроводности и позволяющий доказать разрешимость задачи Ионкина без использования разложений по биортонгольным системам. Наконец, в [13] был предложен подход, основанный на новых априорных оценках. Этот подход позволил установить существование решений задачи Ионкина и близких к ней задач в естественных пространствах Соболева для широкого класса дифференциальных уравнений в частных производных.

Именно к работе [13] по постановке изучаемых задач и применяемым методам близка настоящая работа.

Уточним, что целью настоящей работы является доказательство существования и единственности регулярных решений изучаемых задач, т. е. таких решений, которые имеют все суммируемые с квадратом по области определения обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Уравнения, изучаемые в работе, имеют модельный вид. О более общих уравнениях (а также о более общих задачах) будет сказано в конце работы.

## 1. Постановка задач

Пусть  $\Omega$  — интервал  $(0, 1)$  оси  $Ox$ ,  $Q$  — прямоугольник  $\Omega \times (0, T)$ . Пусть  $h(t)$ ,  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$  и  $f(x, t)$  — заданные функции, определенные при  $t \in [0, T]$ ,  $x \in \overline{\Omega}$ ;  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_0$  — дифференциальные операторы, действие которых на заданной функции  $v(x, t)$  определяется равенствами

$$L_1 v = h(t)v_t - v_{xx},$$

$$L_2 v = a(x, t)v_{xx} + b(x, t)v_x + c(x, t)v,$$

$$L_0 v = \frac{\partial}{\partial x}(L_1 v) + L_2 v.$$

В изучаемых ниже задачах функция  $h(t)$  не будет, вообще говоря, иметь на отрезке  $[0, T]$  фиксированного знака. Это означает, что числа  $h(0)$  и  $h(T)$  определяют, задавать или не задавать граничные условия по переменной  $t$ . Уточним, какими могут быть эти условия.

Будем говорить, что для той или иной краевой задачи *выполняется условие*  $V_1$ , если в ней требуется для решения  $u(x, t)$  равенство  $u(x, 0) = 0$ ,  $x \in \Omega$ . Далее будем говорить, что для той или иной краевой задачи *выполняется условие*  $V_2$ , если в ней требуется выполнение для решения  $u(x, t)$  равенств  $u(x, 0) = u(x, T) = 0$  при  $x \in \Omega$ . Наконец, будем говорить, что для той или иной краевой задачи *выполняется условие*  $V_3$ , если в ней не требуется выполнения граничных условий при  $t = 0$  и при  $t = T$ .

Перейдем к формулировке изучаемых в работе задач.

**Нелокальная задача  $I_p$ .** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$L_0 u = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условие  $V_p$  и условия

$$u(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad t \in (0, t), \quad (2)$$

$$u_x(0, t) = \alpha(t)u_x(1, t) + \beta(t)u(1, t), \quad t \in (0, T). \quad (3)$$

**Нелокальная задача  $II_p$ .** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условие  $V_p$  и условия

$$u(1, t) = u_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, t), \quad (4)$$

$$u_{xx}(0, t) = \alpha(t)u_{xx}(1, t) + \beta(t)u_x(0, t) + \gamma(t)u(0, t), \quad t \in (0, T). \quad (5)$$

Индекс  $p$  в задачах  $I_p$  и  $II_p$  принимает одно из трех значений: 1, 2 и 3. Если в задачах  $I_p$  и  $II_p$   $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  и  $\gamma(t)$  — тождественно нулевые на отрезке  $[0, T]$  функции, то эти задачи будут задачами с локальными граничными условиями, если же  $\alpha(t) \equiv 1$  при  $t \in [0, T]$ , то задачи  $I_p$  и  $II_p$  можно назвать аналогами задачи Ионкина.

## 2. Разрешимость нелокальных задач $I_p$

Доказательство разрешимости нелокальных задач  $I_p$  основано на априорных оценках. Эти оценки вначале будут получены на регулярных решениях, т. е. на решениях, все производные (обобщенные) которых, участвующие в соответствующих выкладках, существуют. Необходимые обоснования возможности подобных действий даны ниже.

Определим квадратичную форму  $F(t, \xi, \eta)$ :

$$F(t, \xi, \eta) = \frac{1}{2} \{ [1 - \alpha^2(t) + a(1, t)] \xi^2 - 2\alpha(t)\beta(t)\xi\eta + [c(1, t) - \beta^2(t)] \eta^2 \},$$

$$t \in [0, T], \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2.$$

Если коэффициенты этой формы непрерывны, то существуют функции  $\alpha_0(t)$  и  $\beta_0(t)$  такие, что при  $t \in [0, T]$ ,  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  выполняются неравенства

$$\alpha_0(t) \leq 0, \quad \beta_0(t) \leq 0, \quad F(t, \xi, \eta) \geq \alpha_0(t)\xi^2 + \beta_0(t)\eta^2. \quad (6).$$

Введем обозначения:

$$\bar{\alpha}_0 = \max_{[0, T]} |\alpha_0(t)|, \quad \bar{\beta}_0 = \max_{[0, T]} |\beta_0(t)|.$$

**Лемма 1.** Пусть выполняются условия

$$h(t) \in C^1([0, T]), \quad h(0) > 0, \quad h(T) \geq 0; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} a(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad a_x(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad b(x, t) \in C(\overline{Q}), \\ c(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad c_x(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad \alpha(t) \in C([0, T]), \quad \beta(t) \in C([0, T]); \end{aligned} \quad (8)$$

$$xb(x, t) - \frac{1}{2}xh'(t) - \frac{1}{2}(xa(x, t))_x \geq b_0x, \quad b_0 > 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}; \quad (9)$$

а также одно из условий

$$\begin{aligned} c(x, t) \leq -c_0 < 0, \quad c_x(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}, \\ \overline{\beta}_0 < c_0, \quad b_0 - \frac{\overline{\beta}_0^2}{c_0 - \overline{\beta}_0} - 2\overline{\alpha}_0 > 0, \quad \overline{\alpha}_0^2 < b_0 - \frac{\overline{\beta}_0^2}{c_0 - \overline{\beta}_0} - 2\overline{\alpha}_0; \end{aligned} \quad (10)$$

или

$$\begin{aligned} xc_x(x, t) + c(x, t) \leq -c_0x, \quad c_0 > 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}, \\ 2\overline{\beta}_0 < c_0, \quad b_0 - \frac{\overline{\beta}_0^2}{c_0 - 2\overline{\beta}_0} - 2\overline{\alpha}_0 > 0, \quad \overline{\alpha}_0^2 < b_0 - \frac{\overline{\beta}_0^2}{c_0 - 2\overline{\beta}_0} - 2\overline{\alpha}_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда для регулярных решений  $u(x, t)$  нелокальной задачи  $I_1$  выполняется оценка

$$\int_Q (xu_{xx}^2 + xu_x^2 + u^2) dxdt + \int_0^T (u_x^2(1, t) + u^2(1, t)) dt \leq M_1 \int_Q f^2 dxdt, \quad (12)$$

постоянная  $M_1$  в которой определяется функциями  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $h(t)$ ,  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим равенство

$$\int_Q xL_0uu_x dxdt = \int_Q xfu_x dxdt. \quad (13)$$

С помощью интегрирования по частям и краевых условий это равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \int_Q \left\{ xu_{xx}^2 + \left[ xb(x, t) - \frac{1}{2}xh'(t) - \frac{1}{2}(xa(x, t))_x \right] u_x^2 - \frac{1}{2}(xc(x, t))_x u^2 \right\} dxdt \\ + \int_0^T F(t, u_x(1, t), u(1, t)) dt = \int_Q xfu_x dxdt. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть выполняются условия (7)–(10). Тогда из равенства (14) следует неравенство

$$\int_Q (xu_{xx}^2 + b_0xu_x^2 + c_0u^2) dxdt \leq \overline{\alpha}_0 \int_0^T u_x^2(1, t) dt + \overline{\beta}_0 \int_0^T u^2(1, t) dt + \left| \int_Q xfu_x dxdt \right|. \quad (15)$$

Имеют место следующие оценки:

$$\int_0^T u_x^2(1, t) dt \leq \delta_0 \int_Q x u_{xx}^2 dx dt + \left(2 + \frac{1}{\delta_0}\right) \int_Q x u_x^2 dx dt, \quad (16)$$

$$\int_0^T u^2(1, t) dt \leq \delta_1 \int_Q x u_x^2 dx dt + \left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right) \int_Q x u^2 dx dt, \quad (17)$$

в которых  $\delta_0$  и  $\delta_1$  — произвольные положительные числа (см. [13]). Условие (10) означает, что существуют числа  $\delta_0$  и  $\delta_1$ , для которых справедливы неравенства

$$\bar{\alpha}_0 \delta_0 < 1, \quad \bar{\alpha}_0 \left(2 + \frac{1}{\delta_0}\right) + \bar{\beta}_0 \delta_1 < b_0, \quad \left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right) \bar{\beta}_0 < c_0.$$

Фиксируя эти числа и далее применяя неравенство Юнга для оценки последнего слагаемого правой части (15), получим, что для решений  $u(x, t)$  нелокальной задачи  $I_1$  выполняется оценка

$$\int_Q (x u_{xx}^2 + x u_x^2 + u^2) dx dt \leq M'_1 \int_Q f^2 dx dt.$$

Из этой оценки, а также из неравенств (16) и (17) вытекает требуемая оценка (12).

Пусть выполняются условия (7)–(9), (11). Эти условия означают, что следствием (14) будет неравенство

$$\begin{aligned} & \int_Q (x u_{xx}^2 + b_0 x u_x^2 + c_0 x u^2) dx dt \\ & \leq \bar{\alpha}_0 \int_0^T u_x^2(1, t) dt + \bar{\beta}_0 \int_0^T u^2(1, t) dt + \left| \int_Q x f u_x dx dt \right|. \end{aligned} \quad (18)$$

Оценивая первое слагаемое в правой части (18) с помощью неравенства (16), далее второе слагаемое в правой части (18) с помощью такого же неравенства, для функции  $u(1, t)$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_Q (x u_{xx}^2 + b_0 x u_x^2 + c_0 x u^2) dx dt \leq \bar{\alpha}_0 \delta_0 \int_Q x u_{xx}^2 dx dt \\ & + \left[ \left(2 + \frac{1}{\delta_0}\right) \bar{\alpha}_0 + \bar{\beta}_0 \delta_1 \right] \int_Q x u_x^2 dx dt + \bar{\beta}_0 \left(2 + \frac{1}{\delta_1}\right) \int_Q x u^2 dx dt + \left| \int_Q x f u_x dx dt \right|. \end{aligned}$$

Условие (11) означает, что можно подобрать положительные числа  $\delta_0$  и  $\delta_1$  так, чтобы выполнялись неравенства

$$\bar{\alpha}_0 \delta_0 < 1, \quad \bar{\alpha}_0 \left(2 + \frac{1}{\delta_0}\right) + \bar{\beta}_0 \delta_1 < b_0, \quad \left(2 + \frac{1}{\delta_1}\right) \bar{\beta}_0 < c_0.$$

Фиксируя числа  $\delta_0$  и  $\delta_1$  указанным образом и применяя неравенство Юнга, получим, что для решений  $u(x, t)$  нелокальной задачи  $I_1$  выполняется оценка

$$\int_Q (xu_{xx}^2 + xu_x^2 + xu^2) dxdt + \int_0^T (u_x^2(1, t) + u^2(1, t)) dt \leq M_1'' \int_Q f^2 dxdt.$$

Используя равенство

$$\int_Q u^2 dxdt = \int_0^T u^2(1, t) dt - 2 \int_Q xuu_x dxdt$$

и предыдущую оценку, нетрудно получить оценку для  $u^2(x, t)$  и требуемую оценку (12).

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть выполняются условия

$$h(t) \in C^1([0, T]), \quad h(0) > 0, \quad h(T) < 0,$$

а также условия (8), (9) и либо условие (10), либо условие (11). Тогда для регулярных решений  $u(x, t)$  нелокальной задачи  $I_2$  выполняется оценка (12).

**Лемма 3.** Пусть выполняются условия

$$h(t) \in C^1([0, T]), \quad h(0) \leq 0, \quad h(T) \geq 0;$$

а также условия (8), (9) и либо условие (10), либо условие (11). Тогда для регулярных решений  $u(x, t)$  нелокальной задачи  $I_3$  выполняется оценка (12).

Доказательство лемм 2 и 3 полностью аналогично доказательству леммы 1.

Перейдем к получению следующих оценок.

Основой для доказательства теорем существования решений нелокальных задач  $I_p$  будет метод регуляризации. Суть этого метода в том, что к исходному уравнению добавляются слагаемые, содержащие производные более высокого порядка нежели те, которые имелись изначально, и добавляются также соответствующие краевые условия. Это означает, что априорные оценки решений изучаемых задач можно получать на функциях, удовлетворяющих некоторым дополнительным соотношениям.

**Лемма 4.** Пусть выполняются все условия леммы 1, а также условия

$$xb(x, t) + \frac{1}{2}xh'(t) - \frac{1}{2}(xa(x, t))_x \geq b_0x, \quad (x, t) \in \overline{Q};$$

$$a_t(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad b_t(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad c_t(x, t) \in C(\overline{Q});$$

$$\alpha(t) \in C^1([0, T]), \quad \beta(t) \in C^1([0, T]);$$

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q);$$

$$f(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Тогда для регулярных решений  $u(x, t)$  нелокальной задачи  $I_1$ , удовлетворяющих условию  $u_t(x, T) = 0$  при  $x \in \Omega$ , выполняется оценка

$$\int_Q (xu_{xxt}^2 + xu_{xt}^2 + u_t^2) dxdt \leq M_2 \int_Q (f^2 + f_t^2) dxdt, \quad (19)$$

постоянная  $M_2$  в которой определяется функциями  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $h(t)$ ,  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку выполняются все условия леммы 1, для решений  $u(x, t)$  справедлива оценка (12). Анализируя равенство

$$-\int_Q xLu_{xtt} dxdt = -\int_Q xfu_{xtt} dxdt$$

и фактически повторяя все рассуждения и выкладки, проведенные при доказательстве леммы 1, дополнительно используя оценку (12) и в правой части (20) выполняя интегрирование по частям по переменной  $t$ , придем к требуемой оценке.

Лемма доказана.

**Лемма 5.** Пусть выполняются все условия леммы 2, а также условия

$$xb(x, t) + \frac{1}{2}xh'(t) - \frac{1}{2}(xa(x, t))_x \geq b_0x, \quad (x, t) \in \overline{Q};$$

$$a_t(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad b_t(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad c_t(x, t) \in C(\overline{Q});$$

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q);$$

$$f(x, 0) = f(x, T) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Тогда для регулярных решений  $u(x, t)$  нелокальной задачи  $I_2$  выполняется оценка (19).

**Лемма 6.** Пусть выполняются все условия леммы 3, а также условия

$$xb(x, t) + \frac{1}{2}xh'(t) - \frac{1}{2}(xa(x, t))_x \geq b_0x, \quad (x, t) \in \overline{Q};$$

$$a_t(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad b_t(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad c_t(x, t) \in C(\overline{Q});$$

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q).$$

Тогда для регулярных решений  $u(x, t)$  нелокальной задачи  $I_3$ , удовлетворяющих условиям  $u_t(x, 0) = u_t(x, T) = 0$  при  $x \in \Omega$ , выполняется оценка (19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА лемм 5 и 6 проводятся вполне аналогично доказательству леммы 4.

Следующие оценки дадим в совокупном виде.

**Лемма 7.** Пусть для коэффициентов  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ , функций  $h(t)$ ,  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ , а также для функции  $f(x, t)$  выполняются условия одной из лемм 4, 5 или 6. Тогда для регулярных решений  $u(x, t)$  краевой задачи  $I_1$  таких, что  $u_t(x, T) = 0$  при  $x \in \Omega$ , или для регулярных решений  $u(x, t)$  краевой задачи  $I_2$ , или для регулярных решений  $u(x, t)$  краевой задачи  $I_3$  таких, что  $u_t(x, 0) = u_t(x, T) = 0$  при  $x \in \Omega$ , в случае выполнения соответствующих условий лемм 4, 5 или 6 имеет место оценка

$$\int_Q (u_{xt}^2 + u_{xxx}^2) dx dt \leq M_3 \int_Q (f^2 + f_t^2) dx dt, \quad (20)$$

постоянная  $M_3$  в которой определяется функциями  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $h(t)$ ,  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку для решений  $u(x, t)$  соответствующей задачи  $I_1$ ,  $I_2$  или  $I_3$  выполняется оценка (19), будет выполняться и оценка

$$\int_0^T u_{xt}^2(1, t) dt \leq M'_2 \int_Q (f^2 + f_t^2) dx dt, \quad (21)$$

с постоянной  $M'_2$ , определяющейся лишь функциями  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $h(t)$ ,  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ . Это следует из неравенств (19) и (16).

Рассмотрим равенство

$$-\int_Q L u u_{xxx} dx dt = -\int_Q f u_{xxx} dx dt.$$

Это равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \int_Q u_{xxx}^2 dx dt + \frac{h(T)}{2} \int_{\Omega} u_{xx}^2(x, T) dx - \frac{h(0)}{2} \int_{\Omega} u_{xx}^2(x, 0) dx \\ &= -\int_0^T h(t) u_{xt}(0, t) u_{xx}(0, t) dt + \frac{1}{2} \int_Q h'(t) u_{xx}^2 dx dt + \int_Q a u_{xx} u_{xxx} dx dt \\ & \quad + \int_Q b u_x u_{xxx} dx dt + \int_Q c u u_{xxx} dx dt - \int_Q f u_{xxx} dx dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Все слагаемые левой части (22) неотрицательны. Оценим правую часть (22). В первом слагаемом правой части (22) заменим множитель  $u_{xt}(0, t)$  с помощью условия (3), к каждому получившемуся слагаемому и к оставшимся слагаемым правой части (22), кроме второго, применим неравенство Юнга. Далее воспользуемся неравенствами

$$\int_Q u_{xx}^2(x, t) dx dt \leq \delta \int_Q u_{xxx}^2(x, t) dx dt + C(\delta) \int_Q u_x^2(x, t) dx dt,$$

$$\int_0^T u_{xx}^2(0, t) dt \leq \delta \int_Q u_{xxx}^2(x, t) dx dt + C(\delta) \int_Q u_x^2(x, t) dx dt,$$

в которых  $\delta$  — произвольное положительное число, а также оценками (12) и (19). Суммируя, получим, что следствием равенства (22) и всех проведенных выкладок будет априорная оценка

$$\int_Q u_{xxx}^2 dx dt \leq M_2'' \int_Q (f^2 + f_t^2) dx dt \quad (23)$$

с постоянной  $M_2''$ , определяющейся лишь функциями  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $h(t)$ ,  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ .

Используя равенство

$$\int_Q u_{xt}^2 dx dt = \int_0^T u_{xt}^2(1, t) dt - 2 \int_Q x u_{xt} u_{xxt} dx dt$$

и учитывая оценку (19), нетрудно получить оценку в  $L_2(Q)$  функции  $u_{xt}(x, t)$ . Суммируя, получим, что для решений  $u(x, t)$  при выполнении условий леммы выполняется требуемая оценка.

Лемма доказана.

Полученных оценок достаточно для доказательства разрешимости нелокальных задач  $I_p$ ,  $p = 1, 2, 3$ .

**Теорема 1.** Пусть для коэффициентов  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ , функций  $h(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  и  $f(x, t)$  выполняются условия лемм 4, 5 или 6, и пусть дополнительно выполняются включения

$$\alpha(t) \in C^2([0, T]), \quad \beta(t) \in C^2([0, T]).$$

Тогда каждая нелокальная задача  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  имеет решение  $u(x, t)$  такое, что  $u(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)$ ,  $u_x(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)$ , причем ровно одно.

**Доказательство.** Воспользуемся методом регуляризации.

Пусть  $\varepsilon$  и  $\mu$  — положительные числа. Определим оператор  $L_{\varepsilon, \mu}$  его действием на функции  $v(x, t)$ :

$$L_{\varepsilon, \mu} v = \varepsilon(v_{xxxxt} - \mu v_{xtt}) + L_0 v.$$

Будем искать решение уравнения

$$L_{\varepsilon, \mu} u = f, \quad (x, t) \in Q, \quad (24)$$

удовлетворяющее условиям задач  $I_1$ ,  $I_2$  или  $I_3$ , а также дополнительным условиям

$$u_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (25)$$

при выполнении неравенств

$$h(0) > 0, \quad h(T) \geq 0$$

или

$$u_t(x, 0) = u_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (26)$$

при выполнении неравенств

$$h(0) \leq 0, \quad h(T) \geq 0.$$

Фиксируя число  $\varepsilon$  и подбирая и фиксируя число  $\mu$  большим, нетрудно показать, что для регулярных решений каждой из задач  $I_1$ ,  $I_2$  или  $I_3$  (с соответствующими дополнительными условиями (25) и (26) для задач  $I_1$  или  $I_2$ ) будет выполняться априорная оценка

$$\varepsilon \int_Q u_{xxxxtt}^2 dxdt + \int_Q u_{xxx}^2 dxdt \leq M_4 \int_Q f^2 dxdt, \quad (27)$$

постоянная  $M_4$  в которой определяется функциями  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $h(t)$ ,  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ , а также числом  $\varepsilon$ . Эта оценка и метод продолжения по параметру означают, что соответствующие краевые задачи (представленные выше) имеют регулярные решения.

Повторяя для решений  $u_\varepsilon(x, t)$  соответствующих краевых задач для уравнения (24) доказательство соответствующих лемм 1–7, нетрудно получить, что для этих решений будет выполняться оценки (19) и (20), а также оценка

$$\varepsilon^2 \int_Q u_{\varepsilon xxxtt}^2 dxdt \leq M_5 \int_Q (f^2 + f_t^2) dxdt, \quad (28)$$

определяющаяся лишь функциями  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $h(t)$ ,  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ .

Оценки (19), (20) и (27), свойство рефлексивности гильбертова пространства (т. е. возможность выбора слабо сходящейся последовательности из семейства  $\{u_{\varepsilon, p}(x, t)\}$ ,  $\varepsilon > 0$ ) означает, что существуют последовательности  $\{u_{m, p}(x, t)\}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ,  $p = 1, 2, 3$ , сходящиеся к искомым решениям краевых задач  $I_p$ .

Теорема доказана.

### 3. Разрешимость нелокальных задач $II_p$

С помощью априорных оценок, метода регуляризации и метода продолжения по параметру нетрудно получить разрешимость нелокальных задач  $II_p$  в классе регулярных решений.

Пусть  $v(x, t)$  — функция, являющаяся решением задачи

$$v_{xx}(x, t) = w(x, t), \quad v(1, t) = v_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T) \quad (29)$$

( $w(x, t)$  — заданная функция). Очевидно, что функция  $v(x, t)$  определяется равенством

$$v(x, t) = \int_x^1 \int_y^1 w(z, t) dz dy.$$

Рассмотрим задачу: найти функцию  $w(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$h(t)w_t - w_{xx} + a(x, t)w_x + (b(x, t) + a_x(x, t))w - (c(x, t) + b_x(x, t)) \int_x^1 w(y, t) dy = f_x(x, t) \quad (30)$$

и такую, что для нее выполняются условия  $V_p$  для  $p = 1$  или  $p = 2$ , или  $p = 3$ , а также условия

$$w(0, t) = \alpha(t)w(1, t) - \beta(t) \int_0^1 w(y, t) dy + \gamma(t) \int_0^1 \left( \int_y^1 w(z, t) dz \right) dy, \quad t \in (0, T),$$

$$w_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (31)$$

Краевая задача (30), (31) с условиями  $V_p$ ,  $p = 1, 2, 3$ , близка к задачам, изученным в работах [13, 15] (отличается от них наличием в уравнении и в краевом условии дополнительных слагаемых интегрального вида). Используя технику этих работ, а также технику разд. 2 (с использованием метода регуляризации, метода продолжения по параметру и априорных оценок), нетрудно определить условия и доказать разрешимость каждой из задач (30), (31) с условиями  $V_p$  в классе регулярных решений. Определим функцию  $u(x, t)$  как решение задачи (29), и потребуем, чтобы выполнялось следующее условие:

$$a(1, t) = 0, \quad t \in (0, T).$$

Это условие, а также равенства (30) и (31) означают, что для функции  $u(x, t)$  выполняются уравнение (1), условия (4) и (5), а также соответствующее условие  $V_p$ ,  $p = 1, 2, 3$ . Очевидно, что найденная функция  $u(x, t)$  и будет искомым регулярным решением соответствующих задач  $II_p$ ,  $p = 1, 2, 3$ .

#### 4. Заключение

В работе получены новые результаты о разрешимости нелокальных задач с обобщенным условием Самарского — Ионкина для дифференциальных уравнений составного типа с параболическим оператором второго порядка, в котором направление эволюции может меняться произвольным образом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
2. Ионкин Н. И. Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1279–1283.
3. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.

4. Beilin S. A. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions // Electron. J. Differ. Equ. 2001. V. 2001, N 76. P. 1–8.
5. Berdyshev A. S., Cabada A., Kadizkulov B. J. The Samarskii–Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62, N 10. P. 3884–3893.
6. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Изв. вузов. Математика. 2011. № 2. С. 71–82.
7. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. Обратная задача для уравнения эллиптико-параболического типа с нелокальным граничным условием // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 633–647.
8. Ismailov M. I., Kanka F. An inverse coefficient problems for a parabolic equation in the cases of nonlocal boundary and overdetermination conditions // Math. Methods Appl. Sci. 2011. T. 34, N 6. P. 692–702.
9. Калиев И. А., Сабитова М. М. Задача определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 1. С. 89–97.
10. Kerimov N. B., Ismailov M. I. An inverse coefficient problems for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 396. P. 546–554.
11. Юрчук Н. И. Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2117–2126.
12. Нахушев А. М. Задача со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
13. Kozhanov A. I. Initial-boundary value problems with generalized Samarskii–Ionkin condition for parabolic equations with arbitrary evolution direction // J. Math. Sci. 2023. V. 274, N 2. P. 228–240.
14. Sadybekov M. A. Initial-boundary value problem for a heat equation with not strongly regular boundary conditions // Functional Analysis in Interdisciplinary Applications (T. S. Kalmenov, E. D. Nursultanov, M. V. Ruzhansky, M. A. Sadybekov, eds.). P. 330–348. Cham: Springer, 2017. (Springer Proc. Math. Stat.; V. 216).
15. Кожанов А. И., Хромченко Д. С. Нелокальные задачи с интегрально-возмущенным условием А. А. Самарского для квазипараболических уравнений третьего порядка // Мат. заметки СВФУ. 2023. Т. 30, № 4. С. 12–23.

*Поступила в редакцию 29 июля 2024 г.*

*После доработки 5 сентября 2024 г.*

*Принята к публикации 6 декабря 2024 г.*

Кожанов Александр Иванович  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
kozhanov@math.nsc.ru

Хромченко Дмитрий Сергеевич  
Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090  
dmtrkh12144@vk.com

GENERALIZED SAMARSKII—IONKIN'S  
PROBLEM FOR THE COMPOSITE  
TYPE DIFFERENTIAL EQUATION WITH  
DEGENERATING OPERATOR IN HIGHER PART  
A. I. Kozhanov and D. S. Khromchenko

**Abstract:** We study the problems similar to the known Samarskii–Ionkin's problem for the composite type differential equation with degenerating operator of heat conduction in higher part. In this work we prove existence and uniqueness of regular solutions for such problems.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-4-35-48

**Keywords:** composite type differential equation, nonlocal problem, generalized Samarskii–Ionkin condition, regular solution, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Ionkin N. I., "Solution of a boundary value problem of heat conduction theory with a nonclassical boundary condition [in Russian]," *Differents. Uravn.*, **13**, No. 2, 294–304 (1977).
2. Ionkin N. I., "On the stability of a problem in the theory of heat conduction with a nonlocal boundary condition [in Russian]," *Differents. Uravn.*, **15**, No. 7, 1279–1283 (1979).
3. Samarskij A. A., "On some problems of the theory of differential equations [in Russian]," *Differents. Uravn.*, **16**, No. 11, 1925–1935 (1980).
4. Beilin S. A., "Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions," *Electron. J. Differ. Equ.*, **2001**, No. 76, 1–8 (2001).
5. Berdyshev A. S., Cabada A., and Kadizkulov B. J., "The Samarskii–Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator," *Comput. Math. Appl.*, **62**, No. 10, 3884–3893 (2011).
6. Sabitov K. B. and Martem'yanova N. V., "A nonlocal inverse problem for a mixed-type equation," *Russ. Math. (Iz. VUZ)*, **55**, No. 2, 71–82 (2011).
7. Sabitov K. B. and Martem'yanova N. V., "An inverse problem for an equation of elliptic-hyperbolic type with a nonlocal boundary condition," *Sib. Math. J.*, **53**, No. 3, 633–647 (2012).
8. Ismailov M. I. and Kanka F., "An inverse coefficient problems for a parabolic equation in the Cases of nonlocal boundary and overdetermination conditions," *Math. Methods Appl. Sci.*, **34**, No. 6, 692–702 (2011).
9. Kaliev I. A. and Sabitova M. M., "Problems of the determination of the temperature and density of heat sources from the initial and final temperatures," *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **12**, No. 1, 89–97 (2009).
10. Kerimov N. B. and Ismailov M. I., "An inverse coefficient problems for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions," *J. Math. Anal. Appl.*, **396**, 546–554 (2012).
11. Yurchuk N. I., "Mixed problem with integral condition for some parabolic equations [in Russian]," *Differents. Uravn.*, **22**, No. 12, 2117–2126 (1986).
12. Nakhushhev A. M., *Shift Problem for Partial Differential Equations [in Russian]*, Nauka, Moscow (2006).

13. Kozhanov A. I., “Initial-boundary value problems with generalized Samarskii–Ionkin condition for parabolic equations with arbitrary evolution direction,” *J. Mat. Sci.*, **274**, No. 2, 228–240 (2023).
14. Sadybekov M. A., “Initial-boundary value problem for a heat equation with not strongly regular boundary conditions,” in: *Functional Analysis in Interdisciplinary Applications*, (T. S. Kalmenov, E. D. Nursultanov, M. V. Ruzhansky, M. A. Sadybekov, eds.), pp. 330–348, Springer, Cham (2017) (Springer Proc. Math. Stat.; vol. 216).
15. Kozhanov A. I. and Khromchenko D. S., “Nonlocal problems with an integrally-disturbed A. A. Samarskii condition for third order quasi-parabolic equations [in Russian],” *Mat. Zamet. SVFU*, **30**, No. 4, 12–23 (2023).

*Submitted July 29, 2024*

*Revised September 5, 2024*

*Accepted December 6, 2024*

Aleksandr I. Kozhanov  
Sobolev Institute of Mathematics,  
4 Koptug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia  
`kozhanov@math.nsc.ru`

Dmitrii S. Khromchenko  
Novosibirsk State University,  
1 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia  
`dmtrkh12144@vk.com`