Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2024. Том 31, № 1

УДК 517.95

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ И НЕИЗВЕСТНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А. И. Кожанов, Г. Р. Ашурова

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости в пространствах С. Л. Соболева нелинейных обратных задач определения вместе с решением $u(x,t)$ параболического уравнения также неизвестного зависящего от времени коэффициента самого уравнения. Изучаемые задачи являются новыми, поскольку исходное параболическое уравнение вырождающееся. В качестве условий переопределения в работе используются условия интегрального переопределения по области или интегрального граничного переопределения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, т. е. решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-56-69

Ключевые слова: параболические уравнения, вырождение, нелинейные обратные коэффициентные задачи, интегральное переопределение, регулярные решения, существование, единственность.

Введение

Изучаемые в работе задачи относятся к классу нелинейных обратных коэффициентных задач временного типа для параболических уравнений (термин «временного типа» в данном случае означает, что неизвестный коэффициент зависит лишь от одной выделенной — временной — переменной). Степень новизны полученных ниже результатов определяется прежде всего тем, что основное уравнение в данной работе вырождающееся. Обратные коэффициентные задачи для параболических уравнений представляются достаточно хорошо изученными (см. монографии [1–4], статьи [5–8]); как наиболее близкую по постановке и применяемым методом выделим статью [8]. Вместе с тем заметим, что обратные коэффициентные задачи для вырождающихся параболических уравнений изучены мало.

В ряде работ (см. [2, 9–12]) изучалась разрешимость обратных коэффициентных задач для вырождающихся параболических уравнений, но характер вырождения в них был иной, нежели в настоящей работе. Близкие по характеру

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2022-0008.

вырождения уравнения и соответственно обратные задачи для них изучались в [13, 14], но вид вырождения в них также был иной.

Таким образом, полученные ниже результаты новые.

Заметим следующее. Изучаемые в работе задачи имеют модельный вид. Возможные усиления и обобщения полученных в работе результатов описаны в конце статьи.

1. Постановка задач

Пусть $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0, T)$ — боковая граница Q, $\varphi(t), N(x), h(t)$ и $f(x,t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

Обратная задача I. *Найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$u_t - \varphi(t)\Delta u + q(t)u = f(x,t) \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}\right|_S = 0 \tag{3}$$

(ν — *вектор внутренней нормали и* Γ *в текущей точке* x),

$$\int\limits_{\Omega} N(x)u(x,t)\,dx = h(t), \quad t \in (0,T). \tag{4}$$

Обратная задача II. *Найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением* (1), *при выполнении для функции $u(x,t)$ условий и* (2), (3), *а также условия*

$$\int\limits_{\Gamma} N(x)u(x,t)\,dS_x = h(t), \quad t \in (0,T). \tag{5}$$

В обратных задачах I и II будет предполагаться, что функция $\varphi(t)$ неотрицательна при $t \in [0, T]$. Именно это предположение и означает, что уравнение (1) может вырождаться. Далее условия (2) и (3) представляются условиями обычной второй начально-краевой задачи для параболических уравнений второго порядка (условие (3) есть хорошо известное условие непротекания), условия (4) и (5) являются условиями интегрального переопределения, соответственно внутреннего интегрального переопределения и граничного интегрального переопределения.

2. Разрешимость обратной задачи I

Положим

$$g_1(t) = \int\limits_\Omega N(x)f(x,t)\,dx - h'(t), \quad m_1 = \operatorname*{vraimin}_{[0,T]} g_1(t), \quad \varphi_0 = \max_{[0,T]} \varphi(t),$$

$$M_1 = \sum_{i=1}^n \int\limits_Q \varphi^{-1}(t) f_{x_i}^2(x,t)\,dxdt + \|\Delta u_0\|^2_{L_2(\Omega)},$$

$$M_2 = T\|\Delta f\|_{L_2(Q)} + \big(T^2\|\Delta f\|^2_{L_2(Q)} + T\|\Delta u_0\|^2_{L_2(\Omega)}\big)^{1/2},$$

$$M_3 = \|\Delta u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + 2M_2\|\Delta f\|_{L_2(Q)}.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$\varphi(t) \in C([0,T]), \quad \varphi(t) \ge 0 \text{ при } t \in [0,T];$$

$$N(x) \in L_2(\Omega);$$

$$h(t) \in C^1([0,T]), \quad h(t) \ge h_0 > 0 \text{ при } t \in [0,T];$$

$$u_0(x) \in W_2^4(\Omega), \quad \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \frac{\partial \Delta u_0(x)}{\partial \nu} = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad \int\limits_\Omega N(x)u_0(x)dx = h(0),$$

а также одно из следующих условий

(а) $f(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, $\varphi^{-\frac{1}{2}}(t)f_{x_i}(x,t) \in L_2(Q)$, $i = 1,\dots,n$, $\varphi_0 M_1^{\frac{1}{2}}\|N\|_{L_2(\Omega)} \le m_1$

или

(б) $f(x,t) \in L_2\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big)$, $\frac{\partial f(x,t)}{\partial \nu}\big|_S = 0$, $\varphi_0 M_3^{\frac{1}{2}}\|N\|_{L_2(\Omega)} \le m_1$.

Тогда обратная задача I *имеет решение* $\{u(x,t), q(t)\}$ *такое, что*

$$u(x,t) \in L_\infty\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big), \quad \varphi^{\frac{1}{2}}(t)\Delta u(x,t) \in L_2\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big),$$

$$u_t(x,t) \in L_2(Q), \quad q(t) \in L_\infty([0,T]), \quad q(t) \ge 0 \text{ при } t \in [0,T].$$

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации и методом срезок. Пусть

$$G(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \le m_1, \\ m_1, & \text{если } \xi > m_1, \\ -m_1, & \text{если } \xi < -m_1. \end{cases}$$

Для положительного числа ε рассмотрим задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$L_\varepsilon u \equiv u_t + \varepsilon\Delta^2 u - \varphi(t)\Delta u + \frac{1}{h(t)}\left[g_1(t) + \varphi(t)G\left(\int\limits_\Omega N(x)\Delta u(x,t)\,dx\right)\right]u = f(x,t) \tag{6}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$\left.\frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu}\right|_S = 0. \tag{7}$$

Данная задача представляет собой вторую начально-краевую задачу для нелинейного «нагруженного» [15, 16] параболического уравнения четвертого порядка. Поскольку в этом уравнении для функции $G(\xi)$ выполняется условие Липщица, краевая задача (6), (2), (3), (7) при фиксированном ε и принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in L_2\big(0,T;W_2^4(\Omega)\big)$, $u_t(x,t) \in L_2(Q)$. Покажем, что при выполнении условий теоремы для решений имеют место равномерные по ε оценки, позволяющие в семействе задач (6), (2), (3), (7) организовать процедуру предельного перехода.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_\Omega L_\varepsilon u(x,\tau)\Delta^2 u(x,\tau)\,dxd\tau = \int_0^t\int_\Omega f(x,\tau)\Delta^2 u(x,\tau)\,dxd\tau.$$

Интегрируя по частям, это равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\frac12\int_\Omega[\Delta u(x,t)]^2\,dx - \frac12\int_\Omega[\Delta u_0(x)]^2\,dx + \sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega\varphi(\tau)[\Delta u_{x_i}(x,\tau)]^2\,dxd\tau \\ + \int_0^t\int_\Omega\frac{1}{h(\tau)}\Big[g_1(\tau)+\varphi(t)G\Big(\int_\Omega N(x)\Delta u(x,\tau)\,dx\Big)\Big][\Delta u(x,\tau)]^2\,dxd\tau \\ + \varepsilon\int_0^t\int_\Omega[\Delta^2 u(x,\tau)]^2\,dxd\tau = \int_0^t\int_\Omega f(x,\tau)\Delta^2 u(x,\tau)\,dxd\tau. \quad (8)\end{aligned}$$

Заметим, что предпоследнее слагаемое в левой части (8) неотрицательно. Если выполняется условие (а), то вследствие равенства

$$\int_0^t\int_\Omega f(x,\tau)\Delta^2 u(x,\tau)\,dxd\tau = -\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega\varphi^{-1/2}(\tau)f_{x_i}(x,\tau)\varphi^{1/2}(\tau)\Delta u_{x_i}(x,\tau)\,dxd\tau$$

из (8) вытекает оценка

$$\int_\Omega[\Delta u(x,t)]^2\,dx + \sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega\varphi(\tau)[\Delta u_{x_i}(x,\tau)]^2\,dxd\tau + \varepsilon\int_0^t\int_\Omega[\Delta^2 u(x,\tau)]^2\,dxd\tau \le M_1. \quad (9)$$

Далее, если выполняется условие (б), то имеет место равенство

$$\int_0^t\int_\Omega f(x,\tau)\Delta^2 u(x,\tau)\,dxd\tau = \int_0^t\int_\Omega\Delta f(x,\tau)\Delta u(x,\tau)\,dxd\tau;$$

с помощью этого равенства из (8) нетрудно вывести оценки

$$\Big(\int_Q[\Delta u(x,t)]^2\,dxdt\Big)^{1/2} \le M_2, \quad (10)$$

$$\int\limits_{\Omega}[\Delta u(x,t)]^2\,dx \le M_3, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\varphi(\tau)[\Delta u_{x_i}(x,\tau)]^2\,dxd\tau+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}[\Delta^2 u(x,\tau)]^2\,dxd\tau\le\frac{1}{2}M_3. \tag{12}$$

Из оценки (9) при выполнении условия (а) или из оценок (10)–(12) при выполнении условия (б) вытекает последняя требуемая оценка

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau\le M_4, \tag{13}$$

постоянная M_4 в которой определяется постоянной M_1 или постоянными M_2 и M_3.

Из оценок (9) или (11), а также из последнего неравенства условий (а) или (б) следует, что выполняется равенство

$$G\biggl(\int\limits_{\Omega}N(x)\Delta u(x,t)\,dx\biggr)=\int\limits_{\Omega}N(x)\Delta u(x,t)\,dx. \tag{14}$$

Далее, полученные априорные оценки (9)–(13), равенство (14) и свойства рефлексивности гильбертова пространства позволяют найти последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ положительных чисел такую, что $\varepsilon_m\to 0$ при $m\to\infty$, последовательность $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ решений краевой задачи (6), (2), (3), (7) с $\varepsilon=\varepsilon_m$, а также функцию $u(x,t)$ такие, что при $m\to\infty$ имеет место слабая в пространстве $L_2(Q)$ сходимость

$$L_{\varepsilon_m}u_m\to u_t-\varphi(t)\Delta u+\frac{1}{h(t)}\biggl[g_1(t)+\varphi(t)\int\limits_{\Omega}N(x)\Delta u(x,t)\,dx\biggr]u.$$

Очевидно, что функция $u(x,t)$ будет принадлежать требуемому в теореме классу и что функции $u(x,t)$ и $q(t)$, определенная равенством

$$q(t)=\frac{1}{h(t)}\biggl[g_1(t)+\varphi(t)\int\limits_{\Omega}N(x)\Delta u(x,t)\,dx\biggr],$$

будут связаны в цилиндре Q уравнением (1).

Принадлежность найденной функции $q(t)$ классу $L_\infty([0,T])$ и ее неотрицательность очевидны.

Наконец, выполнение для функции $u(x,t)$ условия переопределения (4) показывается стандартным образом (см., например, [8]).

Все сказанное выше и означает, что пара $\{u(x,t),q(t)\}$ представляет собой искомое решение обратной задачи I.

Теорема доказана.

Обсудим вопрос о единственности решений обратной задачи I.

Обозначим через W_1 множество функций $\{u(x,t),q(t)\}$ таких, что $u(x,t)\in L_\infty\bigl(0,T;W_2^1(\Omega)\bigr)\cap L_2\bigl(0,T;W_2^2(\Omega)\bigr)$, $q(t)\in L_\infty([0,T])$, $q(t)\ge 0$ при $t\in[0,T]$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$\varphi(t) \in C([0,T]),\ \varphi(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0,T]; \quad N(x) \in W_2^1(\Omega).$$

Тогда любые два решения $\{u_1(x,t), q_1(t)\}$ и $\{u_2(x,t), q_2(t)\}$ обратной задачи I, *принадлежащие множеству W_1, совпадают.*

Доказательство. Обозначим $\omega(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Для функции $q_i(t)$, $i = 1,2$, имеют место равенства

$$q_i(t) = \frac{1}{h(t)}\left[g_1(t) - \varphi(t)\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} N_{y_j}(y)u_{iy_j}(y)\,dy\right].$$

Следовательно, для функции $\omega(x,t)$ выполняется уравнение

$$\omega_t - \varphi(t)\Delta\omega + q_1(t)\omega = \frac{\varphi(t)}{h(t)}\left(\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} N_{y_j}(y)\omega_{y_j}(y,t)\,dy\right)u_2(x,t).$$

Умножим это уравнение на функцию $-\Delta\omega$ и проинтегрируем по пространственным переменным по области Ω и по временной переменной от 0 до текущей точки. Получим равенство

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\omega_{x_k}^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\varphi(\tau)[\Delta\omega(x,\tau)]^2\,dxd\tau + \sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} q_1(\tau)\omega_{x_k}^2(x,\tau)\,dxd\tau$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\varphi(\tau)}{h(\tau)}u_{2x_k}(x,\tau)\omega_{x_k}(x,\tau)\left(\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}N_{y_j}(y)\omega_{y_k}(y,\tau)\right)dy\right]dxd\tau.$$

Оценивая правую часть этого равенства с помощью неравенства Гёльдера, придем к оценке

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\omega_{x_k}^2(x,t)\,dx \leq M_0\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\omega_{x_k}^2(x,\tau)\,dxd\tau,$$

в которой число M_0 определяется функциями $\varphi(t)$, $N(x)$, $h(t)$ и $u_2(x,t)$. Из этой оценки и леммы Гроуолла вытекает, что функция $u_1(x,t)$ совпадает с функцией $u_2(x,t)$. Но тогда и функция $q_1(t)$ совпадает с функцией $q_2(t)$, а это и означает, что для обратной задачи I имеет место свойство единственности решений.

Теорема доказана.

3. Разрешимость обратной задачи II

Исследование разрешимости обратной задачи II в целом проводится вполне аналогично тому, как проводилось исследование разрешимости обратной задачи I, т. е. с помощью метода регуляризации, метода срезок и априорных оценок.

Пусть $\psi(x)$ — функция из пространства $W_2^1(\Omega)$. Для этой функции выполняется неравенство

$$\int\limits_{\Gamma} \psi^2(x)\,dS \le d_0 \|\psi\|^2_{W_2^1(\Omega)}, \tag{15}$$

постоянная d_0 в котором определяется лишь областью Ω (см. [17, 18]).

Положим

$$g_2(t) = \int\limits_{\Gamma} N(x) f(x,t) dS - h_0'(t), \quad m_2 = \operatorname*{vraimin}_{[0,T]} g_2(t),$$

$$M_5 = \sum_{i=1}^{n} \|\varphi^{-\frac{1}{2}} \Delta^2 f\|^2_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n} \|\Delta u_{0x_i}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad M_6 = \max_{i=1,\dots,n} (\|\Delta f_{x_i}\|_{L_2(Q)}),$$

$$M_7 = \sqrt{n} T M_6 + \left(n T^2 M_6^2 + T \sum_{i=1}^{n} \|\Delta u_{0x_i}\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$M_8 = \sum_{i=1}^{n} \|\Delta u_{0x_i}\|^2_{L_2(\Omega)} + 2 M_6 M_7,$$

$$M_{ij} = M_i + M_j, \ i = 1 \text{ или } i = 3, \ j = 5 \text{ или } j = 5.$$

Определим условия, которые понадобятся ниже:

(α) $$f(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega)), \quad \varphi^{-\frac{1}{2}}(t) f_{x_k}(x,t) \in L_2(Q), \ k = 1, \dots, n;$$

(β) $$f(x,t) \in L_2\big(0,T; W_2^2(\Omega)\big), \quad \left.\frac{\partial f(x,t)}{\partial \nu}\right|_S = 0;$$

(γ) $$f(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(S)), \quad \varphi^{-\frac{1}{2}}(t) \Delta f(x,t) \in L_2(Q);$$

(δ) $$f(x,t) \in L_2\big(0,T; W_2^3(\Omega)\big), \quad \left.\frac{\partial f(x,t)}{\partial \nu}\right|_S = 0.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*

$$\varphi(t) \in C([0,T]), \quad \varphi(t) \ge 0 \text{ при } t \in [0,T]; \quad N(x) \in L_2(\Gamma);$$

$$h(t) \in C^1([0,T]), \quad h(t) \ge h_0 > 0 \text{ при } t \in [0,T]; \quad u_0(x) \in W_2^6(\Omega),$$

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \frac{\partial \Delta u_0(x)}{\partial \nu} = \frac{\partial \Delta^2 u_0(x)}{\partial \nu} = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad \int\limits_{\Gamma} N(x) u_0(x)\,dS = h(0),$$

а также либо условия (α) *и* (γ) *и условие* $d_0\varphi_0 M_{15}^{1/2} \le m_2$, *либо условия* (α) *и* (δ) *и условие* $d_0\varphi_0 M_{18}^{1/2} \le m_2$, *либо условия* (β) *и* (γ) *и условие* $d_0\varphi_0 M_{35}^{1/2} \le m_2$, *либо условия* (β) *и* (δ) *и условие* $d_0\varphi_0 M_{38}^{1/2} \le m_2$.

Тогда обратная задача II *имеет решение* $\{u(x,t), q(t)\}$ *такое, что*

$$u(x,t) \in L_\infty\big(0,T; W_2^2(\Omega)\big), \quad \varphi^{\frac{1}{2}}(t)\Delta^2 u(x,t) \in L_2(0,T; L_2(\Omega)),$$

$$u_t(x,t) \in L_2(Q), \quad q(t) \in L_\infty([0,T]), \quad q(t) \geq 0 \text{ *при* } t \in [0,T].$$

Доказательство. Вновь определим срезающую функцию $G(\xi)$, но в этот раз с помощью числа m_2. Для положительного числа ε рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_t - \varepsilon\Delta^3 u - \varphi(t)\Delta u + \frac{1}{h(t)}\left[g_2(t) + \varphi(t)G\bigg(\int\limits_\Gamma N(x)\Delta u(x,t)\,dS\bigg)\right]u = f(x,t) \quad (16)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$\frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial\nu}\bigg|_S = \frac{\partial\Delta^2 u(x,t)}{\partial\nu}\bigg|_S = 0. \quad (17)$$

Используя метод неподвижной точки, теоремы вложения [17, 18] и теорему Шаудера, нетрудно установить, что краевая задача (16), (2), (3), (17) при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in L_2\big(0,T; W_2^6(\Omega)\big) \cap L_\infty\big(0,T; W_2^3(\Omega)\big)$, $u_t(x,t) \in L_2(Q)$. Покажем, что для функций $u(x,t)$ имеют место «хорошие» априорные оценки.

Используя технику доказательства теоремы 1, нетрудно получить, что при выполнении одного из условий (α) или (β) для функций $u(x,t)$ выполняется соответствующая оценка

$$\int\limits_\Omega [\Delta u(x,t)]^2 dx \leq M_1 \quad (18)$$

или

$$\int\limits_\Omega [\Delta u(x,t)]^2 dx \leq M_3. \quad (19)$$

Умножим уравнение (16) на функцию $-\Delta^3 u$ и проинтегрируем по пространственным переменным по области Ω и по временной переменной от 0 до текущей точки. Повторяя выкладки, которые привели к неравенствам (9)–(13), получим, что для функции $u(x,t)$ выполняется одна из оценок

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega [\Delta u_{x_i}(x,t)]^2\,dx \leq M_5, \quad (20)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega [\Delta u_{x_i}(x,t)]^2 dx \leq M_8 \quad (21)$$

в зависимости от того, какое из условий (γ) или (δ) выполняется, а также оценка

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega \varphi(\tau)[\Delta^2 u(x,\tau)]^2\,dxd\tau + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega [\Delta^3 u(x,\tau)]^2\,dxd\tau \leq M_9, \quad (22)$$

постоянная M_9 в которой определяется функциями $f(x,t)$, $N(x)$ и $h(t)$.

Из оценок (18) и (20) или (19) и (21), а также из неравенства (15) и условий теоремы следует, что выполняется равенство

$$G\Bigl(\int\limits_\Gamma N(x)\Delta u(x,t)\,dS\Bigr) = \int\limits_\Gamma N(x)\Delta u(x,t)\,dS.$$

Используя это равенство, выполняя далее стандартные действия в организации предельного перехода (см. [8]), нетрудно получить, что существует функция $u(x,t)$, принадлежащая требуемому в теореме классу и являющаяся решением уравнения

$$u_t - \varphi(t)\Delta u + \frac{1}{h(t)}\Bigl[g_2(t) + \varphi(t)\int\limits_\Gamma N(x)\Delta u(x,t)\,dS\Bigr]u = f(x,t).$$

Это уравнение означает, что функция $u(x,t)$ и функция $q(t)$, определенная равенством

$$q(t) = \frac{1}{h(t)}\Bigl[g_2(t) + \varphi(t)\int\limits_\Gamma N(x)\Delta u(x,t)\,dS\Bigr],$$

связаны в цилиндре Q уравнением (1). Выполнение для функции $u(x,t)$ условий (2), (3) и (5) очевидны, принадлежность функции $q(t)$ пространству $L_\infty([0,T])$ также очевидна.

Все изложенное выше означает, что функции $u(x,t)$ и $q(t)$ дают искомое решение обратной задачи II.

Теорема доказана.

Определим множество W_2 как множество функций $\{u(x,t), q(t)\}$ таких, что $u(x,t)\in W_1$, $\Delta u(x,t)\in W_1$, $q(t)\in L_\infty([0,T])$, $q(t)\geq 0$ при $t\in[0,T]$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия*

$$\varphi(t)\in C([0,T]),\quad \varphi(t)\geq 0 \text{ при } t\in[0,T];\quad N(x)\in L_2(\Gamma).$$

Тогда любые два решения $\{u_1(x,t), q_1(t)\}$ *и* $\{u_2(x,t), q_2(t)\}$ *обратной задачи* II, *принадлежащие множеству* W_2, *совпадают.*

Доказательство. Для разности $\omega(x,t)$ функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ выполняется уравнение

$$\omega_t - \varphi(t)\Delta\omega + q_1(t)\omega = \frac{\varphi(t)}{h(t)}\Bigl(\int\limits_\Gamma N(y)\Delta\omega(y,t)\,dS\Bigr)\Delta u_2(x,t).$$

Поскольку решения $\{u_1(x,t), q_1(t)\}$ и $\{u_2(x,t), q_2(t)\}$ принадлежат множеству W_2, от этого уравнения можно перейти к уравнению для функции $v(x,t) = \Delta\omega(x,t)$:

$$v_t - \varphi(t)\Delta\omega + q_1(t)v = \frac{\varphi(t)}{h(t)}\Bigl(\int\limits_\Gamma N(y)v(y,t)\,dS\Bigr)\Delta u_2(x,t). \tag{23}$$

Умножим уравнение (23) на функцию $v(x,t)$ и проинтегрируем по $\Omega(x,t)$ и по временной переменной от 0 до текущей точки. Получим равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} v^2(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\varphi(\tau)v_{x_i}^2(x,\tau)\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} q_1(\tau)v^2(x,\tau)\,dxd\tau$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t \frac{\varphi(\tau)}{h(\tau)}\Big(\int\limits_{\Gamma} N(y)v(y,\tau)\,dS\Big)\Big(\int\limits_{\Omega} u_{2x_i}(x,\tau)v_{x_i}(x,\tau)\,dx\Big)\,d\tau. \quad (24)$$

От равенства (24) нетрудно перейти к следующей цепочке неравенств (с помощью неравенств Гёльдера и Юнга и с учетом принадлежности функции $u_2(x,t)$ множеству W_2). Оценивая правую часть этого равенства с помощью неравенства Гёльдера, придем к оценке

$$\int\limits_{\Omega} v^2(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\varphi(\tau)v_{x_i}^2(x,\tau)\,dxd\tau$$
$$\le \sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t \frac{\varphi(\tau)}{h(\tau)}\Big(\int\limits_{\Gamma} N(y)v(y,\tau)\,dS\Big)\Big(\int\limits_{\Omega} u_{2x_i}^2(x,\tau)\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int\limits_{\Omega} v_{x_i}^2(x,\tau)\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}d\tau$$
$$\le \delta_1\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\varphi(\tau)\Big(\int\limits_{\Omega} v_{x_i}^2(x,\tau)\,dx\Big)d\tau + M(\delta_1)\int\limits_0^t\varphi(\tau)\Big(\int\limits_{\Gamma} N(y)v(y,\tau)\,dS\Big)^2d\tau; \quad (25)$$

число δ_1 в последнем неравенстве есть произвольное положительное число, число $M(\delta_1)$ определяется помимо числа δ_1 также числом n и функциями $h(t)$, $u_2(x,t)$.

Помимо неравенства (15) для функций $\psi(t)$ из пространства $W_2^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Gamma}\psi^2(x)\,dS \le \delta_0\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\psi_{x_i}^2(x)\,dx + C(\delta_0)\int\limits_{\Omega}\psi^2(x)\,dx, \quad (26)$$

в котором δ_0 вновь есть произвольное положительное число, число $C(\delta_0)$ определяется числом δ_0, а также областью Ω.

Используя (26), продолжим неравенство (25):

$$\int\limits_{\Omega} v^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\varphi(\tau)\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2(x,\tau)\,dxd\tau$$
$$\le \delta_1\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\varphi(\tau)v_{x_i}^2(x,\tau)\,dxd\tau + \delta_0 M(\delta_1)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\varphi(\tau)v_{x_i}^2(x,\tau)\,dxd\tau$$
$$+ C(\delta_0)M(\delta_1)\|N\|_{L_2(\Omega)}^2\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} v^2(x,\tau)\,dxd\tau. \quad (27)$$

Подбирая число δ_1 малым и фиксируя, затем подбирая число δ_0 так, чтобы $\delta_0 M(\delta_1)$ оказалось малым, и далее используя лемму Гронуолла, получим, что $v(x,t)$ есть тождественно нулевая в Q функция. Но тогда и функция $\omega(x,t)$ будет тождественно нулевой в Q функцией. Как отмечено при доказательстве теоремы 2, это и означает, что для обратной задачи II при выполнении условий теоремы 4 имеет место свойство единственности.

Теорема доказана.

4. Комментарии и дополнения

4.1. Определенные в теоремах единственности множества W_1 и W_2, очевидно, являются множествами устойчивости для обратных задач I и II соответственно.

4.2. Теорему существования решений обратной задачи II нетрудно доказать и при выполнении условия $N(x) \in W_2^1(\Omega)$. В этом случае вспомогательной задачей будет задача нахождения решения $u(x,t)$ уравнения

$$u_t - [\varphi(t)+\varepsilon]\Delta u + \left[g_1(t) - \frac{\varphi(t)}{h(t)} G\left(\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} N_{x_j}(x) u_{x_j}(x,t)\,dy\right)\right] = f(x,t) \quad (\varepsilon > 0), \tag{28}$$

для которого выполняются условия (2) и (3). Основная априорная оценка в этой задаче выводится после умножения уравнения (28) на функцию $-\Delta u$.

Заметим, что при выполнении условия $N(x) \in W_2^1(\Omega)$ классы существования и устойчивости будут совпадать.

4.3. В обратных задачах I и II оператор Лапласа вполне можно заменить общим эллиптическим оператором второго порядка. Идеи доказательства теорем существования и единственности останутся прежними, но выкладки и условия станут более громоздкими. Уточним лишь, что в условии (3) нормальную производную нужно будет заменить конормальной.

4.4. В обратных задачах I и II условие (3) вполне можно заменить условием третьей начально-краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 1999.
2. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: WNTI Publ., 2003.
3. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. книж. изд-во, 2009.
4. *Сабитов К. Б.* Обратные задачи для уравнений математической физики. М.: Наука, 2023.
5. *Hussein M. S., Lessnic D., Ivanchov N. I.* Simultaneous determination of time dependent coefficients in the heat equation // Comput. Math. Appl. 2014. V. 67. P. 1065–1091.
6. *Safiullova R. R.* Solvability of nonlinear inverse problem for hyperbolic equation // J. Math. Sci. 2018. V. 228, N 4. P. 431-448.
7. *Belonogov V. A., Pyatkov S. G.* On some classes of inverse problems of determining the heat transfer coefficient in layered media // Sib. Math. J. 2022. V. 63, N 2. P. 252–271.

8. *Kozhanov A. I., Shipina T. N.* Nonlinear inverse problems for parabolic equations with time-dependent coefficients. Reduction to nonlocal problems with Samarski–Ionkin type conditions // J. Math. Sci. 2023. V. 274, N 4. P. 523–533.

9. *Кожанов А. И.* Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2017. Т. 57, № 6. С. 961–972.

10. *Камынин В. Л.* Об обратной задаче определения зависящего от пространственной переменной младшего коэффициента в параболическом уравнении со слабым вырождением // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее прил. Тем. обзоры. 2022. Т. 206. С. 68–81.

11. *Камынин В. Л.* Об обратных задачах для сильно вырождающихся параболических уравнений при условии интегрального наблюдения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 12. С. 2075–2094.

12. *Камынин В. Л.* О корректной разрешимости обратной задачи определения правой части в вырождающемся параболическом уравнении с условием интегрального наблюдения // Мат. заметки. 2015. Т. 98, № 5. С. 710–724.

13. *Кожанов А. И., Абылкаиров У. У., Ашурова Г. Р.* Обратные задачи определения коэффициентов временного типа в вырождающемся параболическом уравнении // Вестн. КарГУ. Сер. Математика. 2022. Т. 106, №2. С. 128–142.

14. *Ашурова Г. Р.* Обратные коэффициентные задачи для вырождающихся параболических уравнений // Междунар. науч. конф. «Обратные и некорректные задачи в естествознании». Алматы, 2023. С. 30.

15. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012.

16. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теор. и прикл. математики, 1995.

Поступила в редакцию 10 февраля 2024 г.
После доработки 10 февраля 2024 г.
Принята к публикации 29 февраля 2024 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

Ашурова Гузел Рашитхужакызы
Казахский национальный университет им. Аль-Фараби,
пр. Аль-Фараби, 71, Алматы 050040, Казахстан
ashurova.guzel@gmail.com

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2024. Том 31, № 1

UDC 517.95

PARABOLIC EQUATIONS WITH DEGENERACY AND UNKNOWN COEFFICIENT

A. I. Kozhanov and G. R. Ashurova

Abstract: The work is devoted to investigating the solvability in Sobolev spaces of nonlinear inverse problems of determination, along with the solution $u(x,t)$ of a parabolic equation, the unknown coefficient dependent on time. The studied problems are unique since the original parabolic equation is degenerate. As the integral overdetermination conditions, we use domain-wide integral overdetermination conditions or integral boundary overdetermination conditions. The existence and uniqueness theorems are proved for regular solutions, i.e. the solutions having all generalized derivatives included in the corresponding equation.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-56-69

Keywords: parabolic equations, degeneration, nonlinear inverse coefficient problems, integral overdetermination, regular solutions, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., and Vasin I. A.*, Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker, New York (1999).
2. *Ivanchov M.*, Inverse Problems for Equations of Parabolic Type, WNTI Publ., Lviv (2003).
3. *Kabanikhin S. I.*, Inverse and Ill-Posed Problems [in Russian], Sib. Knizh. Izdat., Novosibirsk (2009).
4. *Sabitov K. B.*, Inverse Problems for Equations of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (2023).
5. *Hussein M. S., Lessnic D., and Ivanchov N. I.*, “Simultaneous determination of time dependent coefficients in the heat equation,” Comput. Math. Appl., **67**, 1065–1091 (2014).
6. *Safiullova R. R.*, “Solvability of nonlinear inverse problem for hyperbolic equation,” J. Math. Sci., **228**, No. 4, 431–448 (2018).
7. *Belonogov V. A. and Pyatkov S. G.*, “On some classes of inverse problems of determining the heat transfer coefficient in layered media,” Sib. Math. J., **63**, No. 2, 252–271 (2022).
8. *Kozhanov A. I. and Shipina T. N.*, “Nonlinear inverse problems for parabolic equations with time-dependent coefficients. Reduction to nonlocal problems with Samarski–Ionkin type conditions,” J. Math. Sci., **274**, No. 4, 523–533 (2023).
9. *Kozhanov A. I.*, “Parabolic equations with unknown time-dependent coefficients,” Comput. Math. Math. Phys., **57**, No. 6, 961–972 (2017).
10. *Kamynin V. L.*, “On the inverse problem of determining the lowest coefficient depending on a spatial variable in a parabolic equation with weak degeneracy [in Russian],” Itogi Nauki i Tekn., Sovremen. Mat. Pril., Temat. Obzory, **206**, 68–81 (2022).
11. *Kamynin V. L.*, “On inverse problems for strongly degenerate parabolic equations under the condition of integral observation,” Comput. Math. Math. Phys., **58**, No. 12, 2002–2017 (2018)
12. *Kamynin V. L.*, “On the correct solvability of the inverse problem of determining the right side in a degenerate parabolic equation with the condition of integral observation,” Math. Notes, **98**, No. 5, 710–724 (2015).

13. *Kozhanov A. I., Abylkairov U. U., and Ashurova G. R.*, "Inverse problems of determining time-type coefficients in degenerate parabolic equations [in Russian]," Vestn. KarGU, Ser. Mat., **106**, No. 2, 128–142 (2022).
14. *Ashurova G. R.*, "Inverse coefficient problems for degenerate parabolic equations [in Russian]," in: Mezhdunar. Nauch. Konf. "Inverse and Ill-Posed Problems in Natural Science," p. 30, Almaty (2023).
15. *Nakhushev A. M.*, Loaded Equations and Their Applications [in Russian], Nauka, Moscow (2012).
16. *Dzhenaliev M. T.*, On the Theory of Linear Boundary Value Problems for Loaded Differential Equations [in Russian], Inst. Theor. Appl. Math., Almaty (1995).

Submitted February 10, 2024
Revised February 10, 2024
Accepted February 29, 2024

Aleksandr I. Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia;
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia
kozhanov@math.nsc.ru

Guzel R. Ashurova
Al-Farabi Kazakh National University,
71 Al-Farabi Avenue, 050040 Almaty, Kazakhstan
ashurova.guzel@gmail.com