

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ
КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ
ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ
ПАРАМЕТРОВ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

С. Г. Пятков, О. И. Соколов

Аннотация. Рассматривается вопрос о регулярной разрешимости в пространствах Соболева параболических обратных коэффициентных задач в слоистых средах с условиями сопряжения типа дифракции. Решение имеет все обобщенные производные, входящие в уравнение, суммируемые с некоторой степенью. В качестве условий переопределения рассматриваются значения решения в отдельных точках, лежащих внутри области определения. Доказательство основано на получаемых априорных оценках и теореме о неподвижной точке.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.94.19.005

Ключевые слова: параболическое уравнение, обратная задача, начально-краевая задача, существование, единственность.

Введение

Рассматривается вопрос об определении вместе с решением краевой задачи правой части специального вида и коэффициентов в параболическом уравнении. Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ и $Q = (0, T) \times G$. Считаем, что область G разделена на два открытых множества G^+ и G^- , $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}$, $G^+ \cap G^- = \emptyset$, положим $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$, $S_0 = (0, T) \times \Gamma_0$, $S = (0, T) \times \Gamma$. Параболическое уравнение имеет вид

$$u_t + A(t, x, D)u = f(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

где функция f и эллиптический оператор второго порядка A в $G^\pm$ представимы в виде

$$-A(t, x, D) = A_0(t, x, D_x) + \sum_{i=1}^r q_i(t) A_i(t, x, D_x), \quad f = f_0(t, x) + \sum_{i=r+1}^s f_i(t, x) q_i(t),$$
$$A_i = \sum_{k,l=1}^n \partial_{x_l} a_{kl}^i(t, x) \partial_{x_k} + \sum_{k=1}^n a_k^i(t, x) \partial_{x_k} + a_0^i.$$

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (тема «Аналитическое и численное исследование обратных задач об определении параметров источников атмосферного или водного загрязнения и (или) параметров среды», код темы: FENG-2023-0004).

Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad Bu|_S = g(t, x), \quad (2)$$

где $Bu = u$ или

$$Bu = \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} n_j + \sigma u$$

и $n = (n_1, n_2, \dots, n_n)$ — внешняя единичная нормаль к Γ , и условиями сопряжения

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(t, x) = \frac{\partial u^-}{\partial N}(t, x), \quad u^+(t, x) = u^-(t, x), \quad (t, x) \in S_0, \quad (3)$$

где

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(t, x_0) = \lim_{\substack{x \in G^\pm \\ x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \nu_j, \quad u^\pm(t, x_0) = \lim_{\substack{x \in G^\pm \\ x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0}} u(t, x),$$

$\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ — внешняя единичная нормаль к G^- . Условия переопределения имеют вид

$$u(t, b_j) = \psi_j(t), \quad b_j \in G^+ \cup G^-, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (4)$$

Неизвестными в задаче (1)–(4) являются решение u и функции $q_i(t)$ ($i = 1, \dots, s$). Мы не считаем, что Γ или Γ_0 состоят из одной компоненты связности. Вообще говоря, их может быть много и на каждой из них есть свои граничные условия или соответственно свои условия сопряжения. В процессе доказательств мы не оговариваем это дополнительно, чтобы не усложнять изложение.

Проблемы вида (1)–(4) возникают при описании процессов теплопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации, в экологии и во многих других областях. В частности, при описании температурных режимов почв северных территорий возникают задачи об определении теплофизических и массообменных характеристик, которые находятся с помощью решения обратной задачи (см. [1]). Теоретических результатов, посвященных задачам (1)–(4), довольно мало или нет совсем, в отличие от случая одной среды. Опишем полученные результаты в последнем случае. Отметим монографию [2], посвященную обратным параболическим задачам, и монографии [3–6], где описаны основные постановки, в том числе и в параболическом случае. Стоит отметить работы [7–10], где в случае $n = 1$ определяется теплопроводность как функция времени и получены теоремы существования и единственности, а в качестве данных берутся значения решения в отдельных точках, возможно, являющихся граничными. Теплопроводность, не зависящая от одной из пространственных переменных, и часть коэффициентов по данным Коши на боковой поверхности цилиндра и интегральным данным определяется в [11, 12]. Получены теоремы существования и единственности решений и оценки устойчивости. В монографии [3] (см. также, например, результаты работы [13] и др.) получены теоремы существования и единственности решений, в том числе и старших коэффициентов, не зависящих от некоторых пространственных переменных с данными

переопределения на сечениях пространственной области плоскостями. В силу специфики метода все коэффициенты также не зависят от части пространственных переменных. Более полные результаты получены в цикле работ [14–17], где показана корректность обратных задач об определении коэффициентов в случае задания решения на пространственных многообразиях или в отдельных точках, как и в нашем случае. Обратные задачи с точечными данными исследовались в работах А. И. Прилепко и его учеников, и ряд интересных задач описан в [2]. Аналогичные результаты, но при несколько других условиях на данные и в других пространствах получены в [18, 19]. Определение коэффициента теплопроводности $\lambda(T)$ по значениям решения на некоторой кривой, лежащей на границе, исследуется в [20], и получены теорема единственности и оценки устойчивости. Наша работа близка к работе [21], где рассматривалась обратная задача об определении старших коэффициентов в уравнении в случае обычной начально-краевой задачи (не задачи сопряжения). Был исследован вопрос о корректности задачи.

Численному решению задач (1)–(4) посвящено огромное количество работ. Подавляющее большинство численных методов основаны на сведении задачи к задаче оптимального управления и минимизации соответствующего целевого функционала (см. [22–25]). С различными постановками и результатами можно ознакомиться также в работах [26–30].

Опишем содержание работы. В разд. 1 описаны условия на данные задачи и приведены вспомогательные результаты. Разд. 2 посвящен основным результатам.

1. Определения и вспомогательные результаты

Пусть E — банахово пространство. Через $L_p(G; E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) обозначается пространство измеримых функций, определенных на G , со значениями в E и с конечной нормой $\|u(x)\|_E \|_{L_p(G)}$ [31]. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G; E)$, $W_p^s(Q; E)$ и т. д. стандартные (см. [32, 33]). Если $E = \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{R}^n$, то последнее пространство обозначаем просто через $W_p^s(Q)$. Определения пространств Гёльдера $C^{\alpha, \beta}(\overline{Q})$, $C^{\alpha, \beta}(\overline{S})$ могут быть найдены, например, в [34]. Под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Для данного интервала $J = (0, T)$ положим $W_p^{s, r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$. Соответственно $W_p^{s, r}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$. Пусть $(u, v) = \int_G u(x)v(x) dx$. Все рассматриваемые пространства и коэффициенты уравнения (1) считаем вещественными. Далее считаем, что параметр $p > n + 2$ зафиксирован и

$$\Gamma, \Gamma_0 \in C^2. \quad (5)$$

Определение границы класса C^s , $s \geq 1$, можно найти в [34, гл. 1]. Пусть $B_\delta(b)$ — шар радиуса δ с центром в точке b . Зафиксируем параметр $\delta > 0$ такой, что $\overline{B_\delta(b_i)} \cap (\Gamma_0 \cup \Gamma) = \emptyset$ для всех i , $\overline{B_\delta(b_i)} \cap \overline{B_\delta(b_j)} = \emptyset$ для $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, s$. Если необходимо, его всегда можно уменьшить. Введем обозначения: $Q^\tau =$

$(0, \tau) \times G$, $G_\delta = \cup_i B_\delta(b_i)$, $S_0^\tau = (0, \tau) \times \Gamma_0$, $Q^\pm = (0, T) \times G^\pm$, $Q_\tau^\pm = (0, \tau) \times G^\pm$, $S^\tau = (0, \tau) \times \Gamma$.

Условия согласования и гладкости данных могут быть записаны в виде

$$u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G^\pm), \quad B(0, x, D)u_0|_\Gamma = g(0, x), \quad g \in W_p^{k_0, 2k_0}(S), \quad p > n + 2, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial N}(x) = \frac{\partial u_0^-}{\partial N}(x), \quad u_0^+(x) = u_0^-(x), \quad x \in \Gamma_0,$$

где $k_0 = s_1 = 1 - 1/2p$ в случае $Bu = u$ и $k_0 = s_0 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае;

$$u_0(x) \in W_p^{4-2/p}(G_\delta), \quad f_j \in L_p(0, T; W_p^2(G_\delta)) \cap L_p(Q), \quad j = 0, r + 1, \dots, s, \quad (7)$$

$$\psi_j \in W_p^{3/2-1/2p}(0, T), \quad \psi_j(0) = u_0(b_j), \quad j \leq s. \quad (8)$$

Ниже будут встречаться включения вида $f \in L_p(0, T; W_p^1(G_\delta))$ или аналогичные, где соответствующее множество G_δ состоит из нескольких компонент связности (в данном случае $B_\delta(b_j)$). По определению это означает, что $f|_{B_\delta(b_j)} \in L_p(0, T; W_p^1(B_\delta(b_j)))$ для всех j . В качестве нормы в этом пространстве рассматриваем сумму норм по соответствующим компонентам связности. Аналогично для других множеств. Мы считаем, что

$$a_{ij}^k \in C([0, T]; C^1(\overline{G})), \quad a_l^k \in L_p(Q), \quad \sigma, a_{ij}^k|_S \in W_p^{s_0, 2s_0}(S), \quad a_{ij}^k|_{S_0} \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0); \quad (9)$$

$$a_{ij}^k \in L_\infty(0, T; W_p^2(G_\delta)), \quad a_l^k \in L_p(0, T; W_p^2(G_\delta)), \quad (10)$$

$$a_{ij}^k(t, b_a), a_l^k(t, b_a), f_m(t, b_a) \in W_p^{s_0}(0, T),$$

для $i, j = 1, 2, \dots, n$, $l = 0, 1, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, r$, $a = 1, \dots, s$, $m = 0, r + 1, \dots, s$. Ввиду условий (10), (7) следы $f_m(t, b_p)$, $a_l^k(t, b_j)$ определены и $f_m(t, b_p)$, $a_l^k(t, b_j) \in L_p(0, T)$; более того $f_m(t, x)$, $a_l^k(t, x) \in C(\overline{G}_\delta; L_p(0, T))$ (после, может быть, изменения на множестве меры 0) (см. [35, § 2–4, соотношения (3.1)–(3.9), следствие 4.3]).

Пусть E — банахово пространство. Введем пространство

$$\widetilde{W}_p^s(0, T; E) = \left\{ v \in W_p^s(0, T; E) : \int_0^T \frac{\|v(t)\|_E^p}{t^{sp}} dt < \infty \right\}, \quad s \in (0, 1].$$

Оно состоит из $v \in W_p^s(0, T; E)$ таких, что $v(0) = 0$ при $s > 1/p$, и совпадает с $W_p^s(0, T; E)$ при $s < 1/p$. Положим

$$\|v(t)\|_{\widetilde{W}_p^s(0, T; E)}^p = \left\| \frac{\|v\|_E}{t^s} \right\|_{L_p(0, T)}^p + \int_0^T \int_0^T \frac{\|v(t) - v(\tau)\|_E^p}{|t - \tau|^{1+sp}} dt d\tau.$$

Если $E = \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{C}$, пишем $\widetilde{W}_p^s(0, T)$.

Лемма 1. Пусть $s \in (1/p, 1]$ и $q(t) \in \widetilde{W}_p^s(0, \tau)$, $v(t) \in W_p^s(0, T)$ (или $v(t) \in \widetilde{W}_p^s(0, T)$). Тогда $q(t)v(t) \in \widetilde{W}_p^s(0, \tau)$ и справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|qv\|_{\widetilde{W}_p^s(0, \tau)} &\leq c\|q\|_{\widetilde{W}_p^s(0, \tau)}\|v\|_{W_p^s(0, T)}, \text{ или} \\ \|qv\|_{\widetilde{W}_p^s(0, \tau)} &\leq c\|q\|_{\widetilde{W}_p^s(0, \tau)}\|v\|_{\widetilde{W}_p^s(0, \tau)}, \quad \|q\|_{C([0, \tau])} \leq c\|q\|_{\widetilde{W}_p^s(0, \tau)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где постоянная c не зависит от $\tau \in (0, T]$. Если $q(t) \in W_p^s(0, T)$, $v(t) \in W_p^s(0, T)$, то $q(t)v(t) \in W_p^s(0, T)$.

Утверждение вытекает непосредственно из определений норм (см. также лемму 2 в [21]).

Рассмотрим матрицу B_0 размера $s \times s$ со строками

$$A_1(0, b_j, D)u_0(b_j), \dots, A_r(0, b_j, D)u_0(b_j), f_{r+1}(0, b_j), \dots, f_s(0, b_j), \quad j \leq s.$$

Потребуем, чтобы

$$\det B_0 \neq 0. \quad (12)$$

Рассмотрим системы уравнений

$$B_0 \vec{q}_0 = \vec{g}_0, \quad (13)$$

$$\vec{g}_0 = (\psi_{1t}(0) - A_0(0, b_1, D)u_0 - f_0(0, b_1), \dots, \psi_{st}(0) - A_0(0, b_s, D)u_0 - f_0(0, b_s))^T.$$

В силу (12) система (13) имеет единственное решение $q_0 = (q_{01}, \dots, q_{0s})$. Положим $a_{pl} = \sum_{i=0}^r a_{pl}^i q_{0i}$ и далее будем считать, что

$$\sum_{p,l=1}^n a_{pl}(t, x) \xi_p \xi_l \geq \delta_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (t, x) \in Q.$$

где δ_0 — положительная постоянная. Тогда оператор

$$-A^0 = A_0(t, x, D_x) + \sum_{i=1}^r q_{0i} A_i(t, x, D_x)$$

эллиптичен в $G^+ \cup G^-$ и можно рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} u_t + A^0(t, x, D_x)u &= f \quad ((t, x) \in Q), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad Bu|_S = g, \\ \frac{\partial u^+}{\partial N}(x, t) &= \frac{\partial u^-}{\partial N}(x, t), \quad u^+(t, x) = u^-(t, x), \quad (t, x) \in S_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5), (6), (9) и $f \in L_p(Q)$. Тогда существует единственное решение $u \in W_p^{1,2}(Q^\pm)$ задачи (14). Справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^-)} \\ \leq c[\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(Q^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(Q^-)} + \|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{k_0, 2k_0}(S)}]. \end{aligned} \quad (15)$$

Если $g = 0$, то справедлива оценка

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \leq c[\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(Q_\tau^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(Q_\tau^-)} + \|f\|_{L_p(Q_\tau)}], \quad (16)$$

где постоянная c не зависит от $u_0, f, \tau \in (0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы доказано в случае не зависящих от t коэффициентов в [36, гл. 6]. В принципе, утверждение теоремы в случае произвольных коэффициентов вытекает из результатов этой работы и стандартных рассуждений, например, тех, что использованы в [37]. Случай зависящих от t коэффициентов был рассмотрен в [38, теорема 7.1]. К сожалению, эти результаты посвящены в основном случаю, когда $\Gamma \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$, и поэтому изложение и формулировки достаточно громоздки. Второе утверждение и оценка (16) вытекают из стандартных рассуждений, совпадающих, например, с теми, которые использованы в [19, теорема 2; 18, теорема 1].

Теорема 2. Пусть выполнены условия (5)–(7), (9), (10), а также пусть $f \in L_p(0, T; W_p^2(G_\delta))$, $f \in L_p(Q)$. Тогда существует единственное решение $u \in W_p^{1,2}(Q^\pm)$ задачи (14) такое, что $u \in L_p(0, T; W_p^4(G_{\delta_1}))$, $u_t \in L_p(0, T; W_p^2(G_{\delta_1}))$ для всех $\delta_1 \in (0, \delta)$. Если $g = 0$ и $\delta_1 < \delta$, то справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|u\|_{W_p^{1,2m}(Q_\tau^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|u\|_{L_p(0,T;W_p^4(G_{\delta_1}))} + \|u_t\|_{L_p(0,T;W_p^2(G_{\delta_1}))} \\ & \leq c[\|u_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(G^-)} + \|u_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{4-\frac{2}{p}}(G_\delta)} \\ & \quad + \|f\|_{L_p(Q^\tau)} + \|f\|_{L_p(0,\tau;W_p^2(G_\delta))}], \end{aligned} \quad (17)$$

где постоянная c не зависит от $u_0, f, \tau \in (0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о дополнительной гладкости решений и оценке получается с использованием теоремы 1 и повторяет доказательство теоремы 1 в [18] (см. также доказательство теоремы 4, п. 3, § 2, гл. 4 в [39]). Утверждение также содержится в [21, теорема 1], которая здесь применима.

Обозначим левую часть неравенства в (17) через $\|u\|_{H_{\delta_1}^\tau}$, а величину $\|f\|_{L_p(Q^\tau)} + \|f\|_{L_p(0,\tau;W_p^2(G_\delta))}$ — через $\|f\|_{W_\delta^\tau}$. Соответствующие банаховы пространства обозначаются через $H_{\delta_1}^\tau$ и W_δ^τ соответственно. Пространство $H_{\delta_1}^\tau$ состоит из функций $u \in L_p(Q^\tau)$ таких, что $u|_{G^\pm} \in W_p^{1,2}(Q_\tau^\pm)$, $u \in L_p(0, T; W_p^4(G_{\delta_1}))$, $u_t \in L_p(0, T; W_p^2(G_{\delta_1}))$, u удовлетворяет однородным начальным и граничным условиям и условиям сопряжения в (14). Параметр $\delta_1 \in (0, \delta)$ зафиксируем.

2. Основные результаты

Теорема 3. Пусть выполнены условия (5)–(10), (12). Тогда найдется число $\tau_0 \in (0, T]$ такое, что на $(0, \tau_0)$ существует единственное решение $(u, q_1, q_2, \dots, q_s)$ задачи (1)–(4) такое, что

$$u \in W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^\pm), \quad u \in L_p(0, \tau_0; W_p^4(G_{\delta_1})), \quad u_t \in L_p(0, \tau_0; W_p^2(G_{\delta_1}))$$

для всех $\delta_1 \in (0, \delta)$, $q_j \in W_p^{s_0}(0, \tau_0)$, $j = 1, 2, \dots, s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vec{q} = (q_1, \dots, q_s)^T$. Найдем решение Φ задачи (14), где вместо функции f возьмем функцию

$$f = f_0 + \sum_{i=r+1}^s f_i(t, x) q_{0i}$$

а в качестве функций g, u_0 — данные из (1)–(3). В силу теорем 1, 2 существует решение задачи (14) такое, что $\Phi \in W_p^{1,2}(Q^\pm)$, $\Phi \in L_p(0, T; W_p^4(G_{\delta_2}))$, $\Phi_t \in L_p(0, T; W_p^2(G_{\delta_2}))$ для всех $\delta_2 \in (0, \delta)$. Сделав замену переменных $u = v + \Phi$, придем к задаче

$$Lv = v_t + S(\vec{\mu})v = (A^0 - A)\Phi + \sum_{i=r+1}^s f_i(t, x)\mu_i(t), \quad (t, x) \in Q, \quad S(\vec{\mu}) = A^0 + A(\vec{\mu}), \quad (18)$$

где

$$-A(\vec{\mu}) = \sum_{i=1}^r \mu_i(t)A_i(t, x, D_x), \quad \mu_i(t) = q_i(t) - q_{0i};$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad Bv|_S = 0, \quad \frac{\partial v^+}{\partial N}(x, t) = \frac{\partial v^-}{\partial N}(t, x), \quad v^+(t, x) = v^-(t, x) \quad (t, x) \in S_0; \quad (19)$$

$$v(t, b_j) = \psi_j(t) - \Phi(t, b_j) = \tilde{\psi}_j, \quad i = r+1, \dots, s. \quad (20)$$

Имеем $D^\alpha \Phi \in W_p^{1,2}((0, T) \times B_{\delta_1}(b_j))$ для всех j и $|\alpha| \leq 2$. В силу теорем вложения $D_x^\alpha \Phi_i(t, x) \in C^{1-(n+2)/2p, 2-(n+2)/p}(\overline{(0, T) \times B_{\delta_1}(b_j)})$ (см. § 6.3 и теорему 1 (разд. «замечания», с. 424) в [40]). Тогда $D_x^\alpha \Phi(t, b_j) \in W_p^{1/2-1/2p}(0, T)$, поскольку $1-(n+2)/2p > 1/2-1/2p$, и произведения $a_{ij}^k(t, b_j)D_x^\alpha \Phi(t, b_j)$, $a_i^k(t, b_j)D_x^\alpha \Phi(t, b_j)$ принадлежат $W_p^{1/2-1/2p}(0, T)$ (по лемме 1). Значит, $A^0 \Phi(t, b_j) \in W_p^{1/2-1/2p}(0, T)$ (после, может быть, изменения на множестве меры нуль). Рассмотрим правую часть в уравнении. Имеем $f_k(t, b_j) \in W_p^{1/2-1/2p}(0, T)$ (в силу (10)). Из уравнения для Φ вытекает, что $\Phi_t(t, b_j) \in W_p^{1/2-1/2p}(0, T)$, т. е. $\Phi(t, b_j) \in W_p^{3/2-1/2p}(0, T)$ для всех j . Таким образом, задача (1)–(4) сведена к эквивалентной и более простой задаче (18)–(20), которую и будем исследовать. Рассмотрим выражение

$$L(\vec{\xi}) = \sum_{ij=1}^n \tilde{a}_{ij} \xi_i \xi_j, \quad \tilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ij}^k \mu_k,$$

и найдем величину R_0 такую, что

$$|L(\vec{\xi})| \leq \delta_0 |\xi|^2 / 2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (t, x) \in Q, \quad \forall \vec{\mu} : \|\vec{\mu}\|_{C([0, \tau])} \leq R_0.$$

Тогда оператор $S(\vec{\mu})$ эллиптический и будут справедливы теоремы 1, 2 с оператором $S(\vec{\mu})$ вместо оператора A^0 . Фиксируя $\delta_3 \in (\delta_1, \delta)$, для каждой функции $\mu_j \in \widetilde{W}_p^{1/2-1/2p}(0, \tau)$ найдем, используя теоремы 1, 2 с δ_3 вместо δ , решение v задачи (18), (19) на интервале $(0, \tau)$ такое, что $v \in L_p(0, \tau; W_p^4(G_{\delta_2}))$, $v_t \in L_p(0, \tau; W_p^2(G_{\delta_2}))$ для всех $\delta_2 \in (0, \delta_3)$. Имеем отображение $\vec{\mu} \rightarrow v = v(\vec{\mu})$ ($\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_s)$). Изучим его свойства. Пусть

$$\vec{\mu} \in B_{R_0} = \{\vec{\mu} \in \widetilde{W}_p^{1/2-1/2p}(0, \tau) : \|\vec{\mu}\|_{\widetilde{W}_p^{1/2-1/2p}(0, \tau)} \leq R_0\}.$$

Отметим, что $W_p^{1/2-1/2p}(0, \tau) \subset C([0, \tau])$, поэтому без ограничения общности можем считать, что $\|\vec{\mu}\|_{C([0, \tau])} \leq \|\vec{\mu}\|_{\widetilde{W}_p^{1/2-1/2p}(0, \tau)} \leq R_0$ для всех $\vec{\mu} \in B_{R_0}$ (см.

лемму 1). Используя теорему 2, получим уравнение

$$v = L^{-1}f, \quad f = (A^0 - A)\Phi + \sum_{i=r+1}^s f_i(t, x)\mu_i(t) \quad (x \in G^\pm). \quad (21)$$

Фиксируем $\delta_2 \in (\delta_1, \delta_3)$. Имеем оценку

$$\|v\|_{H_{\delta_2}^\tau} = \|L^{-1}f\|_{H_{\delta_2}^\tau} \leq c\|f\|_{W_{\delta_3}^\tau}, \quad (22)$$

где

$$f = \sum_{i=1}^r \mu_i A_i \Phi(t, x) + \sum_{i=r+1}^s \mu_i f_i(t, x), \quad (t, x) \in Q^\pm. \quad (23)$$

Из этого представления и условий на коэффициенты имеем

$$\|f\|_{W_{\delta_3}^\tau} \leq c_2 \|\vec{\mu}\|_{C([0, \tau])}, \quad (24)$$

где постоянная c_2 не зависит от τ и зависит от норм коэффициентов в Q и величин $\|f_i\|_{W_{\delta_3}^\tau}$, $\|\Phi\|_{H_{\delta_3}^\tau}$ (их можно заменить на $\|f_i\|_{W_{\delta_3}^\tau}$, $\|\Phi\|_{H_{\delta_3}^\tau}$). Считая, что $\vec{\mu}_i \in B_{R_0}$ ($i = 1, 2$), рассмотрим два решения v_1, v_2 задачи (18), (19) (или уравнения (21)), отвечающие двум различным наборам $\vec{\mu}_i$ ($\vec{\mu}_i = (\mu_{1i}, \mu_{2i}, \dots, \mu_{si})$, $i = 1, 2$). Вычитая второе уравнение (18) из первого, получим, что разность $\omega = v_2 - v_1$, $v_i = v(\vec{\mu}^i)$, удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \omega_t + S\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right)\omega &= \sum_{j=1}^r (\mu_{j2}(t) - \mu_{j1}(t))A_j(t, x, D)(v_1 + v_2)/2 \\ &+ \sum_{j=1}^r (\mu_{j2}(t) - \mu_{j1}(t))A_j(t, x, D)\Phi + \sum_{j=r+1}^s f_j(t, x)(\mu_{j2}(t) - \mu_{j1}(t)). \end{aligned} \quad (25)$$

Имеем $(\mu_1 + \mu_2)/2 \in B_{R_0}$, и тем самым справедлива оценка (см. (22))

$$\|\omega\|_{H_{\delta_1}^\tau} \leq c\|\tilde{f}\|_{W_{\delta_2}^\tau}, \quad (26)$$

$$\tilde{f} = \sum_{j=1}^r (\mu_{j2}(t) - \mu_{j1}(t))A_j(t, x, D)(v_1 + v_2)/2 + \sum_{j=r+1}^s f_j(t, x)(\mu_{j2}(t) - \mu_{j1}(t)).$$

Из оценок (26), (24) вытекает неравенство

$$\|\omega\|_{H_{\delta_1}^\tau} \leq c\|\tilde{f}\|_{W_{\delta_2}^\tau} \leq c_2 c \|\vec{\mu}_2 - \vec{\mu}_1\|_{C([0, \tau])}, \quad (27)$$

где, как и ранее, c_2 зависит от норм (как линейная функция) $\|(v_1 + v_2)/2\|_{H_{\delta_2}^\tau}$, $\|f_i\|_{W_{\delta_3}^\tau}$. Пусть $v, \vec{\mu}$ — решение задачи (18), (19) и, таким образом, $v = v(\vec{\mu})$. Полагая $x = b_j$ в уравнении (18), с учетом того, что $v_t(t, b_j) = \tilde{\psi}'_j$, получим систему

$$\tilde{\psi}'_j + S(\vec{\mu})v(t, b_j) = \sum_{j=1}^r \mu_j A_j(t, b_j, D)\Phi + \sum_{j=r+1}^s f_j(t, b_j)\mu_j(t). \quad (28)$$

Правую часть этого равенства можно записать в виде $B(t)\vec{\mu}$, где строки матрицы $B(t)$ записываются в виде

$$A_1(t, b_j, D)\Phi(t, b_j), \dots, A_r(t, b_j, D)\Phi(t, b_j), f_{r+1}(t, b_j), \dots, f_s(t, b_j).$$

Матрица $B(0)$ совпадают с матрицей B_0 из (12) и, значит, $\det B(0) \neq 0$. Функции $f_{r+1}(t, b_j)$ непрерывны по t в силу наших условий. Все функции $a_{kl}^i(t, b_j)$, $a_k^i(t, b_j) \in W_p^{s_0}(0, T)$, непрерывны по t в силу условий (9), (10). Как отмечали выше, $D_x^\alpha \Phi(t, x) \in C^{1-1/2p, 2-1/p}(\overline{[0, T] \times G_\delta})$ при $|\alpha| \leq 2$. Таким образом, все элементы матрицы B непрерывны по t и тем самым существуют $\tau_0 \leq T$ и постоянная $\delta_3 > 0$ такие, что

$$|\det B(t)| \geq \delta_3 > 0 \quad \forall t \in [0, \tau_0]. \quad (29)$$

Тогда систему (28) можно записать в виде

$$\vec{\mu}(t) = B^{-1}H(\vec{\mu})(t) = R(\vec{\mu}), \quad (30)$$

$$H(\vec{\mu}) = (\tilde{\psi}'_1 + S(\vec{\mu})v(t, b_1), \tilde{\psi}'_2 + S(\vec{\mu})v(t, b_2), \dots, \tilde{\psi}'_s + S(\vec{\mu})v(t, b_s))^T.$$

В правую часть входит некоторый оператор, сопоставляющий вектор-функции $\vec{\mu}$ величины $S(\vec{\mu})v(t, b_j)$ ($j = 1, 2, \dots, s$), где v — решение задачи (18), (19). По доказанному этот оператор определен для всех векторов $\vec{\mu}$, удовлетворяющих условию $\vec{\mu} \in B_{R_0}$. Свойства отображения $\vec{\mu} \rightarrow v(\vec{\mu})$ мы уже исследовали. Покажем, что можно найти такое $\tau_1 \leq \tau_0$, что оператор $R(\vec{\mu}) = B^{-1}H(\vec{\mu})(t)$, $R : \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau_1) \rightarrow \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau_1)$, определен, переводит шар B_{R_0} в себя и является в нем сжимающим. Рассмотрим величину $\tilde{\psi}'_j(0)$. По построению

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}'_j(0) &= \psi'_j(0) - \Phi'(t, b_j) \\ &= \psi'_j(0) - A(0, b_j, D)u_0(b_j) - \sum_{i=r+1}^s f_i(0, b_j)q_{0i} = 0, \quad j = 1, \dots, s, \end{aligned}$$

в силу того, что числа q_{0i} у нас находились из системы (13). Пусть $\vec{\psi} = (\tilde{\psi}'_1, \tilde{\psi}'_2, \dots, \tilde{\psi}'_s)^T$. Тогда $\vec{\psi} \in \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)$ ($\tau \leq \tau_0$) и в силу леммы 1 $B^{-1}(t)\vec{\psi} \in \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau_1)$. Найдется число $\tau_1 \leq \tau_0$ (в силу абсолютной непрерывности интеграла) такое, что $\|B^{-1}(t)\vec{\psi}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau_1)} \leq R_0/2$. Отметим, что $R(0) = B^{-1}(t)\vec{\psi}(t)$. Получим оценки, считая, что $\vec{\mu}_i \in B_{R_0}$ и $\tau \leq \tau_1$. Оценим $\|R(\vec{\mu}_1) - R(\vec{\mu}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}$ с $\tau \leq \tau_1$. Имеем

$$\begin{aligned} \|R(\vec{\mu}_1) - R(\vec{\mu}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} &\leq c_0 \left(\sum_{i=1}^s \|A_0 v_1(t, b_i) - A_0 v_2(t, b_i)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^r \|\mu_{1k} A_k v_1(t, b_i) - \mu_{2k} A_k v_2(t, b_i)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \right). \quad (31) \end{aligned}$$

Далее используем условия на коэффициенты и вложение $W_p^\theta(G) \subset C(\overline{G})$ при $\theta > n/p$ [31, теоремы 4.6.1, 4.6.2.]. Возьмем $\theta \in (n/p, 1)$. Рассмотрим одно из последних слагаемых. Используя лемму 1, имеем

$$\|\mu_{1k} A_k v_1(t, b_i) - \mu_{2k} A_k v_2(t, b_i)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \|(\mu_{1k} - \mu_{2k})(A_k v_1(t, b_i) + A_k v_2(t, b_i))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} / 2 \\
& \quad + \left\| \frac{(\mu_{1k} + \mu_{2k})}{2} (A_k(v_1(t, b_i) - A_k v_2(t, b_i))) \right\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \\
& \leq \|\mu_{1k} - \mu_{2k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} c_4 \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha(v_1(t, b_j) + v_2(t, b_j))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \\
& \quad + \|\mu_{1k} + \mu_{2k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} c_5 \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha v_1(t, b_j) - D^\alpha v_2(t, b_j)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \\
& \leq \|\mu_{1k} - \mu_{2k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} c_6 \|v_1(t, x) + v_2(t, x)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau; W_p^{2+\theta}(G_{\delta_1}))} \\
& \quad + \|\mu_{1k} + \mu_{2k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau; W_p^{2+\theta}(G_{\delta_1}))} c_7 \|v_1(t, x) - v_2(t, x)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau; W_p^{2+\theta}(G_{\delta_1}))}, \quad (32)
\end{aligned}$$

где постоянные c_i не зависят от τ . Отметим, что пространство Бесова $B_{p,p}^s$ совпадает с пространством Соболева W_p^s при дробных s . Далее воспользуемся равенством

$$(B_{p,p}^\beta(0, \tau; B_{p,p}^{2-\varepsilon_0}(G)), L_p(0, \tau; B_{p,p}^{4-\varepsilon_0}(G)))_{1-\theta_1, p} = B_{p,p}^{s_0}(0, \tau; B_{p,p}^{2+\theta}(G)) \quad (33)$$

с $\theta_1 \beta = s_0$, $(2 - \varepsilon_0)\theta_1 + (1 - \theta_1)(4 - \varepsilon_0) = 2 + \theta$, где $\theta_1 \in (0, 1)$. Утверждение вытекает из [35, теорема 3.1] и известных результатов об интерполяции пространств Соболева [31]. В [35, теорема 3.1] взято $\mathbb{R}^n$ вместо $(0, T)$, однако далее в работе имеется замечание о справедливости результата и в случае, если все $\mathbb{R}^n$ заменить ограниченной областью, для которой имеется оператор продолжения функций на все $\mathbb{R}^n$ с сохранением соответствующих классов Бесова. У нас область совпадает с интервалом $(0, \tau)$ и утверждение, конечно, справедливо. Возьмем $0 < \varepsilon_0 < 2(1 - s_0) - \theta$, $\theta_1 = 1 - (\theta + \varepsilon_0)/2$, $\beta = s_0/\theta_1$. Поскольку все показатели дробные, можем переписать (33) в виде

$$(W_p^\beta(0, \tau; W_p^{2-\varepsilon_0}(G)), L_p(0, \tau; W_p^{4-\varepsilon_0}(G)))_{1-\theta_1, p} = W_p^{s_0}(0, \tau; W_p^{2+\theta}(G)). \quad (34)$$

Здесь область G можно заменить любой другой областью. Отметим, что $\beta \in (0, 1)$. В частности, поскольку для функций из пространств $\widetilde{W}_p^s(0, \tau; E)$ нормы в пространствах $\widetilde{W}_p^s(0, \tau; E)$ (E — банахово пространство) и $W_p^s(0, \tau; E)$ эквивалентны, если $s \neq 1/p$, справедливо неравенство

$$\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau; W_p^{2+\theta}(G_{\delta_1}))} \leq c_8 \|v\|_{\widetilde{W}_p^\beta(0, \tau; W_p^{2-\varepsilon_0}(G_{\delta_1}))}^{\theta_1} \|v\|_{L_p(0, \tau; W_p^{4-\varepsilon_0}(G_{\delta_1}))}^{1-\theta_1}, \quad (35)$$

где постоянная c_8 не зависит от $\tau \in (0, T]$. Доказательство этого факта реализуется довольно просто: рассматриваем функцию $w(\xi, x) = v(\tau\xi, x)$, записываем неравенство (35), где $\tau = 1$, для этой функции, а затем делаем обратную замену переменных $\tau\xi = t$ в интегралах, определяющих нормы. Используя (35), можем переписать неравенство (32) в виде

$$\begin{aligned}
& \|\mu_{1k} A_k v_1(t, b_i) - \mu_{2k} A_k v_2(t, b_i)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \\
& \leq \|\mu_{1k} - \mu_{2k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} c_8 \|v_1 + v_2\|_{\widetilde{W}_p^\beta(0, \tau; W_p^{2-\varepsilon_0}(G_{\delta_1}))}^{\theta_1} \|v_1 + v_2\|_{L_p(0, \tau; W_p^{4-\varepsilon_0}(G_{\delta_1}))}^{1-\theta_1} \\
& \quad + \|\mu_{1k} + \mu_{2k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} c_9 \|v_1 - v_2\|_{\widetilde{W}_p^\beta(0, \tau; W_p^{2-\varepsilon_0}(G_{\delta_1}))}^{\theta_1} \|v_1 - v_2\|_{L_p(0, \tau; W_p^{4-\varepsilon_0}(G_{\delta_1}))}^{1-\theta_1}. \quad (36)
\end{aligned}$$

Воспользуемся очевидными неравенствами

$$\begin{aligned} \|v\|_{\widetilde{W}_p^\beta(0,\tau;W_p^{2-\varepsilon_0}(G_{\delta_1}))} &\leq c_{10}\|v_t\|_{L_p(0,\tau;W_p^2(G_{\delta_1}))}, \\ \|v\|_{L_p(0,\tau;W_p^{4-\varepsilon_0}(G_{\delta_1}))} &\leq c_{11}\|v\|_{L_p(0,\tau;W_p^4(G_{\delta_1}))}^{\theta_2}\|v\|_{L_p(0,\tau;L_p(G_{\delta_1}))}^{1-\theta_2}, \\ \|v\|_{L_p(0,\tau;L_p(G_{\delta_1}))} &\leq \tau\|v_t\|_{L_p(0,\tau;L_p(G_{\delta_1}))}, \\ 4\theta_2 &= 4 - \varepsilon_0, \quad v \in W_p^1(0,\tau;W_p^2(G_{\delta_1})) \cap L_p(0,\tau;W_p^4(G_{\delta_1})), \quad v(0) = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Последнее неравенство легко получается из формулы Ньютона — Лейбница, второе — обычное интерполяционное неравенство [31], а первое вытекает из определения нормы и соответствующего вложения. Все постоянные в них не зависят от τ . Воспользовавшись (36), (37), придем к неравенству

$$\begin{aligned} &\|\mu_{1k}A_kv_1(t, b_i) - \mu_{2k}A_kv_2(t, b_i)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \\ &\leq c_{12}\tau^{\gamma_0}(\|\mu_{1k} - \mu_{2k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}(\|v_1\|_{H_{\delta_1}^\tau} + \|v_2\|_{H_{\delta_1}^\tau}) \\ &+ \|\mu_{1k} + \mu_{2k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\|v_1 - v_2\|_{H_{\delta_1}^\tau}), \quad \gamma_0 = (1 - \theta_2)(1 - \theta_1). \end{aligned} \quad (38)$$

Далее, воспользовавшись неравенствами (22), (24), (26), (27), получим

$$\|\mu_{1k}A_kv_1(t, b_i) - \mu_{2k}A_kv_2(t, b_i)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_{13}\tau^{\gamma_0}\|\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}, \quad (39)$$

где постоянная c_{12} не зависит от $\tau \leq \tau_1$. Аналогичная оценка получается и при оценке выражения

$$\|A_0v_1(t, b_i) - A_0v_2(t, b_i)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_{14}\tau^{\gamma_0}\|\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \quad (40)$$

Окончательно получим оценку (см. (31))

$$\|R(\vec{\mu}_1) - R(\vec{\mu}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_{15}\tau_0^\gamma\|\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \quad (41)$$

Выбрав $\tau_2 \leq \tau_1$ такое, что $c_{14}\tau_2^{\gamma_0} \leq 1/2$, придем к тому, что оператор R сжимающий и переводит шар B_{R_0} в себя для всех $\tau \leq \tau_2$. Применяя теорему о неподвижной точке, покажем существование решения системы (30). Положим $v = v(\vec{\mu})$. Покажем, что построенная функция удовлетворяет условиям переопределения (20). Возьмем в (18) $x = b_j$. Получим систему равенств

$$v_t(t, b_j) + Av(t, b_j) = \sum_{j=1}^r \mu_j A_j(t, b_j, D)\Phi + \sum_{j=r+1}^s f_j(t, b_j)\mu_j(t). \quad (42)$$

Вычитая эти равенства из (27), получим $v_t(t, b_j) - \tilde{\psi}_j' = 0$ для всех j , значит, выполнены условия (20). Единственность решений вытекает из оценок, приведенных при доказательстве существования решений. $\square$

3. Алгоритм численного решения и результаты численных экспериментов

Схема алгоритма. Рассмотрим довольно простой одномерный случай. Данная модель использовалась при определении термофизических и термокинетических параметров в [1]. В области $Q = (0, T) \times G$, $G = (0, R)$, рассматривается задача

$$Mu = c(t, r)u_t - Lu = f, \quad L = \frac{1}{r^\nu} \partial_r(r^\nu g(t, r)u_r), \quad \nu = 0, 1, \quad (43)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_r|_{r=0} = 0, \quad r^\nu g u_r|_{r=0} = q(t), \quad \nu = 0, 1, \quad (44)$$

$$u_{0r}|_{r=0} = 0, \quad R^\nu g(0, R) u_{0r}(R) = q(0), \quad (45)$$

$$u(y_i, t) = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad y_i \in (0, R). \quad (46)$$

Для простоты рассмотрим случай, когда среда не является слоистой, хотя алгоритм может быть использован и в многослойном случае. Он основан на рассуждениях из доказательства теоремы 3. Используем метод конечных элементов. Задана сетка на $(0, R)$, например, равномерная, $r_i = hi$, $h = R/N$, $i = 0, 1, \dots, N$, и базисные кусочно-линейные функции метода конечных элементов, $\varphi_0(r) = 1 - r/h$ при $r \in (0, h)$, $\varphi_0(r) = 0$ при $r > h$, $\varphi_i = (r - r_{i-1})/h$ при $r \in (r_{i-1}, r_i)$, $\varphi_i = (r_{i+1} - r)/h$ при $r \in (r_i, r_{i+1})$, $\varphi_i = 0$ при $r \notin (r_{i-1}, r_{i+1})$, $\varphi_N(r) = (r - r_{N-1})/h$ при $r \in (r_{N-1}, R)$, $\varphi_N(r) = 0$ при $r < r_{N-1}$. Ищем приближенное решение в виде

$$v = \sum_{i=1}^N C_i(t) \varphi_i.$$

Для удобства далее считаем, что точки y_i совпадают с узлами сетки $r_{i_1}, \dots, r_{i_s}$. Функции C_i определяем из системы

$$R_0 \vec{C}_t + R_1(t) \vec{C} = \vec{F}, \quad \vec{C} = (C_0, C_1, \dots, C_N)^T, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (47)$$

$$\vec{F} = \left(\int_0^R r^\nu f(t, r) \varphi_0(r) dr, \dots, \int_0^R r^\nu f(t, r) \varphi_{N-1}(r) dr, \int_0^R r^\nu f(t, r) \varphi_N(r) dr + q(t) \right)^T,$$

R_0 — матрица с элементами

$$r_{ij} = (c(t, r) r^\nu \varphi_i, \varphi_j) = \int_0^R c(t, r) r^\nu \varphi_i(r) \varphi_j(r) dr,$$

R_1 — матрица с элементами $R_{jk} = (r^\nu g(t, r) \varphi_{kr}, \varphi_{jr})$. Имеем $\vec{C}(0) = \vec{C}_0 = (u_0(r_0), \dots, u_0(r_N))$. Решение системы (47) ищем методом конечных разностей. Пусть $\tau = T/M$ — шаг по времени. Заменим уравнение (47) системой

$$R_{i+1} \frac{\vec{C}_{i+1} - \vec{C}_i}{\tau} + A_{i+1} \vec{C}_{i+1} = \vec{F}_{i+1}, \quad \vec{C}_i = (C_i^0, \dots, C_i^N)^T, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad (48)$$

где $C_i^k \approx C_k(\tau i)$, $\vec{F}_i = \vec{F}(\tau i)$, $A_i = R_1(\tau i)$. Пусть $\vec{\alpha}_i = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^s)^T$, $\vec{\alpha}_i \approx \vec{\alpha}(\tau i)$, $\alpha_i^k \approx \alpha_k(i\tau)$. Элементы матрицы A_{i+1} записываются в виде

$$R_{lk}^{i+1} = (g_{i+1}(r) \varphi_{kr}, \varphi_{jr}), \quad g_{i+1} = \sum_{k=1}^s \alpha_{i+1}^k \Phi_k(r).$$

Элементы матрицы R_{i+1} записываются в виде

$$r_{kl}^{i+1} = (c(\tau(i+1), r) r^\nu \varphi_l, \varphi_k) = \int_0^R c(\tau(i+1), r) r^\nu \varphi_l(r) \varphi_k(r) dr.$$

Имеем $C_0^k = u_0(r_k)$ при $k = 0, \dots, N$. Для чисел α_0^k получим систему уравнений

$$2h(i_j h)^\nu c(0, r_{i_j}) \psi_j'(0)/3 + \sum_{k=1}^s \alpha_0^k \beta_{jk} = (r^\nu f(0, r_{i_j}), \varphi_{i_j}), \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

где

$$\beta_{jk} = \sum_{l=0}^N C_0^l (r^\nu \Phi_k \varphi_{lr}, \varphi_{i_j r}).$$

Предполагается, что определитель этой системы отличен от нуля. Приближенно он равен определителю матрицы с элементами $\tilde{\beta}_{jk} = (r^\nu \Phi_k u_{0r}, \varphi_{i_j r})$.

Последовательность вычислений. При $i = 0$ знаем векторы $\vec{C}_0, \vec{\alpha}_0$. При переходе на следующий временной слой используем идеи метода предиктор-корректор. Предположим, что построено решение $\vec{C}_i, \vec{\alpha}_i$. Далее решаем систему (48), где в качестве функции g_{i+1} берем функцию

$$g_{i+1} = \sum_{k=1}^s \alpha_i^k \Phi_k.$$

Находим вектор $\vec{C}_{i+1}$. Определим векторы $\vec{\Psi}_i = (\psi_i^0, \psi_i^1, \dots, \psi_i^N)^T$ такие, что $\psi_i^k = C_i^k$ при $k \neq i_j, j = 1, 2, \dots, s$, и $\psi_i^{i_j} = \psi_j(\tau i)$ для всех j . Составим систему

$$\sum_{l=0}^N \left(\frac{\psi_{i+1}^l - \psi_i^l}{\tau} \right) (r^\nu c((i+1)\tau, r) \varphi_l, \varphi_{i_j}) + \sum_{k=1}^s \alpha_{i+1}^k \beta_{jk} = (r^\nu f((i+1)\tau, r), \varphi_{i_j}), \quad (49)$$

$j = 1, 2, \dots, s$, где

$$\beta_{jk} = \sum_{l=0}^N C_{i+1}^l (r^\nu \Phi_k \varphi_{lr}, \varphi_{i_j r}).$$

Из этой системы находим вектор $\vec{\alpha}_{i+1}$. Присваиваем $\vec{\alpha}_{i+1}^1 := \vec{\alpha}_{i+1}$. Далее из системы (48), где в качестве функции g_{i+1} берем функцию

$$g_{i+1} = \sum_{k=1}^s \alpha_{i+1}^1 \Phi_k,$$

находим вектор $\vec{C}_{i+1}$. Присваиваем $\vec{C}_{i+1}^1 := \vec{C}_{i+1}$. Подставляя его в систему (49), найдем вектор $\vec{\alpha}_{i+1}$. Присваиваем $\vec{\alpha}_{i+1}^2 := \vec{\alpha}_{i+1}$. Далее опять решаем систему (48), где в качестве функции g_{i+1} берем функцию

$$g_{i+1} = \sum_{k=1}^s \alpha_{i+1}^2 \Phi_k.$$

Таким образом найдем $\vec{C}_{i+1}$ и присваиваем $\vec{C}_{i+1}^2 := \vec{C}_{i+1}$. Повторяя рассуждения, построим последовательности векторов $\vec{\alpha}_{i+1}^k, \vec{C}_{i+1}^k$. Повторяем рассуждения до тех пор, пока $|\vec{\alpha}_{i+1}^k - \vec{\alpha}_{i+1}^{k-1}| < \varepsilon$, где ε — заданное малое число. Если при

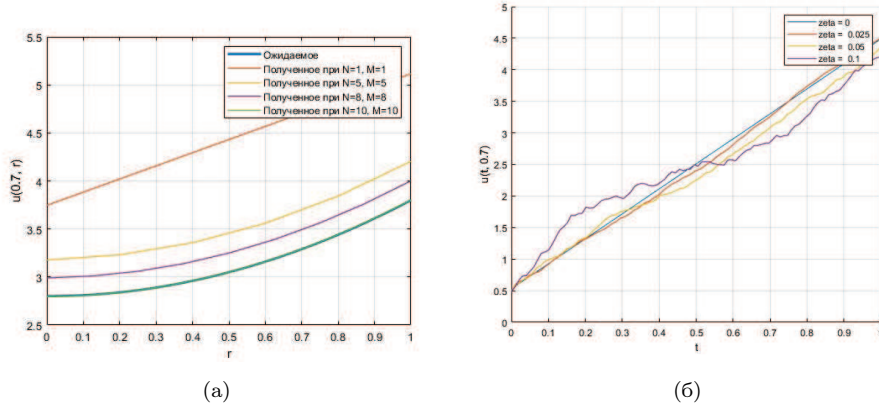


Рис. 1. (а) Решение прямой задачи $u(0.7, r)$; (б) решение прямой задачи $u(t, 0.7)$ при различных интенсивностях возмущений ζ .

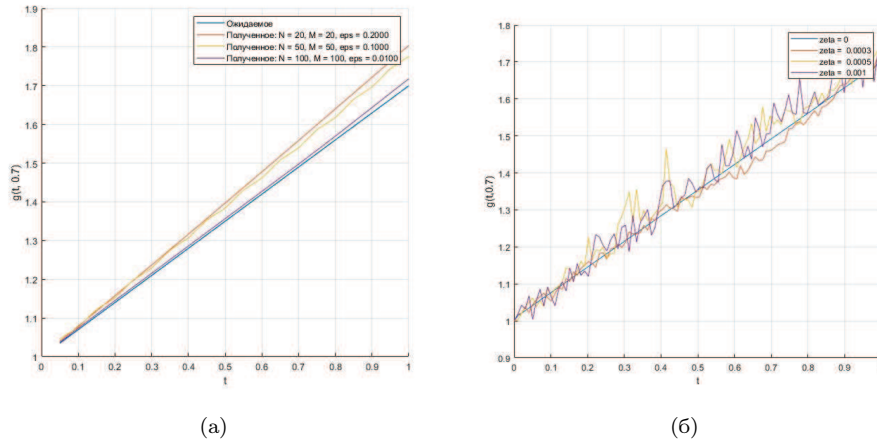


Рис. 2. (а) Решение $g(t, 0.7)$ для различных M, N, ϵ , (б) Решение $g(t, 0.7)$ при различных интенсивностях возмущений ζ .

данном k это условие выполнено, то положим $\vec{C}_{i+1} = \vec{C}_{i+1}^k$, $\vec{\alpha}_{i+1} = \vec{\alpha}_{i+1}^k$. Таким образом, будет выполнено равенство (48), где в качестве g_{i+1} берется функция

$$g_{i+1} = \sum_{k=1}^s \alpha_{i+1}^k \Phi_k.$$

Результаты численных экспериментов. Реализация алгоритма осуществлялась в программной среде Matlab R2019b. Характеристики ЭВМ следующие: процессор Intel(R) Core(TM) i5-10400F CPU @ 2.90GHz 16,00 Гб, 64-разрядная операционная система Windows 10 Home. Входные и ожидаемые выходные данные: $R = 1$, $T = 1$, $\nu = 1$, $c(t, r) = t + r + 1$, $f(t, r) = 4r + 4t - 6rt$, $q(t) = 2t + 2$, $u_0(r) = r^2$, $s = 5$, $y_1, \dots, y_5 = 0.1, 0.2, 0.5, 0.8, 0.9$, $\Phi_1, \dots, \Phi_5 = 1, r, r^2, r^3, r^4$, $u(t, r) = 4t + r^2$, $g(t, r) = 1 + rt$.

Приведем результаты вычислений при нахождении решения прямой задачи. График полученного решения уже при $N = 10$, $M = 10$ практически полностью накладывается на график ожидаемого (рис. 1(а)). Далее в процессе вычисления $\vec{C}_i$ к каждому из векторов $\vec{F}_i$ добавим случайное возмущение вида $\xi\zeta$, где ξ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-1, 1]$ и ζ — интенсивность возмущения. Результаты представлены на рис. 1(б). На рис. 2(а) представлены результаты вычислений решений обратной задачи для нашего примера, а на рис. 2(б) представлены результаты в случае, когда к правой части, как и ранее, добавлено случайное возмущение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пермяков П. П. Идентификация параметров математической модели тепловлагопереноса в мерзлых грунтах. Новосибирск: Наука, 1989.
2. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 1999.
3. Belov Ya. Ya. Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.
4. Isakov V. Inverse problems for partial differential equations. Berlin: Springer-Verl., 2006. (Appl. Math. Sci.; V. 127).
5. Kabanikhin S. I. Inverse and ill-posed problems. Theory and applications. Boston; Berlin: Walter de Gruyter, 2012.
6. Klivanov M. V., Li J. Inverse problems and Carleman estimates. Berlin; Boston: Walter de Gruyter, 2021. (Inverse Ill-Posed Probl. Ser.; V. 63).
7. Hussein M. S., Huntul M. J. Simultaneous identification of thermal conductivity and heat source in the heat equation // Iraqi J. Sci. 2021. V. 62, N 6. P. 1968–1978.
8. Hussein M. S., Lesnic D., Ivanchov M. I. Simultaneous determination of time-dependent coefficients in the heat equation // Comput. Math. Appl. 2014. V. 67. P. 1065–1091.
9. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: WNTL Publ., 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 10).
10. Иванчов Н. И., Пабыривска Н. В. Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 2. С. 406–413.
11. Искендеров А. Д. Многомерные обратные задачи для линейных и квазилинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225, № 5. С. 1005–1008.
12. Iskenderov A. D., Akhundov A. Ya. Inverse problem for a linear system of parabolic equations // Dokl. Math. 2009. V. 79, N 1. P. 73–75.
13. Фроленков И. В., Романенко Г. В. О решении одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 2. С. 139–146.
14. Pyatkov S. G., Samkov M. L. On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations // Sib. Adv. Math. 2012. V. 22, N 4. P. 287–302.
15. Pyatkov S. G., Tsybikov B. N. On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations // J. Evol. Equ. 2011. V. 11, N 1. P. 155–186.
16. Pyatkov S. G. On some classes of inverse problems for parabolic equations. // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. V. 18, N 8. P. 917–934.
17. Pyatkov S. G. On some classes of inverse problems with overdetermination data on spatial manifolds // Sib. Math. J. 2016. V. 57, N 5. P. 870–880.
18. Pyatkov S. G., Rotko V. V. Inverse problems with pointwise overdetermination for some quasilinear parabolic systems // Sib. Adv. Math. 2020. V. 30, N 2. P. 124–142.
19. Pyatkov S. G., Rotko V. V. On some parabolic inverse problems with the pointwise overdetermination // AIP Conf. Proc. 2017. V. 1907. 020008.
20. Egger H., Pietschmann J.-F., Schlottbom M. Identification of nonlinear heat conduction laws // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 23, N 5. P. 429–437.
21. Pyatkov S. G. Identification of thermophysical parameters in mathematical models of heat and mass transfer // J. Comput. Eng. Math. 2022. V. 9, N 2. P. 52–66.

22. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics. Berlin; Boston: Walter de Gruyter, 2007.
23. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Ненарокомов А. В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. М.: Янус-К, 2009.
24. Ozisik M. N., Orlande H. R. B. Inverse heat transfer. New York: Taylor & Francis, 2000.
25. Ткаченко В. Н. Математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов. Киев: Наук. думка, 2008.
26. Huntul M. J., Lesnic D. An inverse problem of finding the time-dependent thermal conductivity from boundary data // Int. Commun. Heat Mass Transfer. 2017. V. 85. P. 147–154.
27. Кабанихин С. И., Хасанов А. Х., Пененко А. В. Метод градиентного спуска для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности // Сиб. журн. вычисл. математики. 2008. Т. 11, № 1. С. 41–51.
28. Mustonen L. Numerical study of a parametric parabolic equation and a related inverse boundary value problem // Inverse Probl. 2016. V. 32. 105008.
29. Бушуев А. Ю., Тимофеев В. Н. Двухкритериальный подход к решению задачи идентификации теплофизических характеристик многослойной пластины // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 9. <http://engjournal.ru/articles/963/963.pdf>.
30. Быков Н. Ю., Хватов А. А., Каложная А. В., Бухановский А. В. Метод восстановления моделей тепломассопереноса по пространственно-временным распределениям параметров // Письма в ЖТФ. 2021. Т. 47, вып. 24. С. 9–12.
31. Triebel H. Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutscher Verl. Wiss., 1978.
32. Denk R., Hieber M., Prüss J. Optimal L_p - L_q -estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data // Math. Z. 2007. V. 257, N 1. P. 93–224.
33. Denk R., Hieber M., Prüss J. R-boundedness, Fourier multipliers, and problems of elliptic and parabolic type // Mem. Amer. Math. Soc. 2003. V. 166. N 788.
34. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
35. Amann H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces // Glasnik Mat. 2000. V. 35. P. 161–177.
36. Prüss J., Simonett G. Moving interfaces and quasilinear parabolic evolution equations. Basel: Birkhäuser, 2016.
37. Agranovich M. S., Vishik M. I. Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type // Russ. Math. Surv. 1964. V. 19. P. 53–157.
38. Amann H. Maximal regularity of parabolic transmission problems // J. Evol. Equ. 2021. V. 21. P. 3375–3420.
39. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
40. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 10 апреля 2023 г.

После доработки 25 апреля 2023 г.

Принята к публикации 29 мая 2023 г.

Пятков Сергей Григорьевич
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012;
Академия наук Республики Саха (Якутия),
пр. Ленина, 33, Якутск 677007
s_pyatkov@ugrasu.ru

Соколов Олег Игоревич
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
sokol.oleg2012@yandex.ru

ON SOME CLASSES OF COEFFICIENT INVERSE
PROBLEMS OF RECOVERING THERMOPHYSICAL
PARAMETERS IN STRATIFIED MEDIA
S. G. Pyatkov and O. I. Sokolkov

Abstract: We examine the question of regular solvability in Sobolev spaces of parabolic inverse coefficient problems in stratified media with conjugation conditions of the diffraction type. A solution has all generalized the derivatives occurring in the equation summable with some power. The overdetermination conditions are the values of the solution at some collection of points lying inside the domain. The proof is based on a priori estimates and the fixed point theorem.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.94.19.005

Keywords: parabolic equation, inverse problem, initial-boundary value problem, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Permyakov P. P., Identification of Parameters of the Mathematical Model of Heat and Moisture Transfer in Frozen Soils [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1989).
2. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., and Vasin I. A., Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker, New York (1999).
3. Belov Ya. Ya., Inverse problems for Parabolic Equations, VSP, Utrecht (2002).
4. Isakov V., Inverse Problems for Partial Differential Equations, Springer, Berlin (2006) (Appl. Math. Sci.; vol. 127).
5. Kabanikhin S. I., Inverse and Ill-Posed Problems, Theory and Applications, Walter de Gruyter, Boston; Berlin (2012).
6. Klibanov M. V. and Li J., Inverse Problems and Carleman Estimates, Walter de Gruyter, Berlin; Boston (2021) (Inverse Ill-Posed Probl. Ser., vol. 63).
7. Hussein M. S. and Huntul M. J., “Simultaneous identification of thermal conductivity and heat source in the heat equation,” Iraqi J. Sci., **62**, No. 6, 1968–1978 (2021).
8. Hussein M. S., Lesnic D., and Ivanchov M. I., “Simultaneous determination of time-dependent coefficients in the heat equation,” Comput. Math. Appl., **67**, 1065–1091 (2014).
9. Ivanchov M., Inverse Problems for Equations of Parabolic Type, WNTL Publ., Lviv (2003) (Math. Stud. Monogr. Ser.; vol. 10).
10. Ivanchov N. I. and Pabyrivska N. V., “On determination of two time-dependent coefficients in a parabolic equation,” Sib. Math. J., **43**, No. 2, 323–329 (2002).
11. Iskenderov A. L., “Multi-dimensional inverse problems for linear and quasilinear parabolic equations [in Russian],” Dokl. AN SSSR, **225**, No. 5, 1005–1008 (1975).
12. Iskenderov A. D. and Akhundov A. Ya., “Inverse problem for a linear system of parabolic equations,” Dokl. Math., **79**, No. 1, 73–75 (2009).
13. Frolenkov I. V. and Romanenko G. V., “On a solution of an inverse problem for multidimensional parabolic equation [in Russian],” Sib. J. Ind. Math., **15**, No. 2, 139–146 (2012).
14. Pyatkov S. G. and Samkov M. L., “On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations,” Sib. Adv. Math., **22**, No. 4, 287–302 (2012).

15. Pyatkov S. G. and Tsybikov B. N., "On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations," *J. Evol. Equ.*, **11**, No. 1, 155–186 (2011).
16. Pyatkov S. G., "On some classes of inverse problems for parabolic equations," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **18**, No. 8, 917–934 (2011).
17. Pyatkov S. G., "On some classes of inverse problems with overdetermination data on spatial manifolds," *Sib. Math. J.*, **57**, No. 5, 870–880 (2016).
18. Pyatkov S. G. and Rotko V. V., "Inverse problems with pointwise overdetermination for some quasilinear parabolic systems," *Sib. Adv. Math.*, **30**, No. 2, 124–142 (2020).
19. Pyatkov S. G. and Rotko V. V., "On some parabolic inverse problems with the pointwise overdetermination," *AIP Conf. Proc.*, **1907**, 020008 (2017).
20. Egger H., Pietschmann J.-F., and Schlottbom M., "Identification of nonlinear heat conduction laws," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **23**, No. 5, 429–437 (2015).
21. Pyatkov S. G., "Identification of thermophysical parameters in mathematical models of heat and mass transfer," *J. Comput. Eng. Math.*, **9**, No. 2, 52–66 (2022).
22. Samarskii A. A. and Vabishchevich P. N., *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*, Walter de Gruyter, Berlin; Boston (2007).
23. Alifanov O. M., Artyukhov E. A., and Nenarokom A. V., *Inverse problems of Complex Heat Transfer* [in Russian], Yanus-K, Moscow (2009).
24. Ozisik M. N. and Orlande H. R. B., *Inverse Heat Transfer*, Taylor & Francis, New York (2000).
25. Tkachenko V. N., *Mathematical Modeling, Identification and Control of Technological Processes of Heat Treatment of Materials* [in Russian], Naukova Dumka, Kiev (2008).
26. Huntul M. J. and Lesnic D., "An inverse problem of finding the time-dependent thermal conductivity from boundary data," *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, **85**, 147–154 (2017).
27. Kabanikhin S. I., Hasanov A., and Penenko A. V., "A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem," *Numer. Anal. Appl.*, **1**, No. 1, 34–45 (2008).
28. Mustonen L., "Numerical study of a parametric parabolic equation and a related inverse boundary value problem," *Inverse Probl.*, **32**, 105008 (2016).
29. Bushuev A. Yu. and Timofeev V. N., "Two parameters approach to solving the problem of identification of thermophysical characteristics of multilayer plate," *Eng. J. Sci. Innov.*, **9** (2013). <http://engjournal.ru/articles/963/963.pdf>
30. Bykov N. Yu., Khvatov A. A., Kalyuzhnaya A. V., and Bukhanovskii A. V., "The method of recovering mathematical models of heat and mass transfer with space and temporal distributions of parameters [in Russian]," *Lett. JTP*, **47**, No. 24, 9–12 (2021).
31. Triebel H., *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, VEB Deutscher Verl. Wiss., Berlin (1978).
32. Denk R., Hieber M., and Prüss J., "Optimal L_p - L_q -estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data," *Math. Z.*, **257**, No. 1, 193–224 (2007).
33. Denk R., Hieber M., and Prüss J., "R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type," *Mem. Amer. Math. Soc.*, **166**, No. 788 (2003).
34. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Ural'tseva N. N., *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Amer. Math. Soc., Providence (1968).
35. Amann H., "Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces," *Glasnik Mat.*, **35**, 161–177 (2000).
36. Prüss J. and Simonett G., *Moving Interfaces and Quasilinear Parabolic Evolution Equations*, Birkhäuser, Basel (2016).
37. Agranovich M. S. and Vishik M. I., "Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type," *Russ. Math. Surv.*, **19**, 53–157 (1964).
38. Amann H., "Maximal regularity of parabolic transmission problems," *J. Evol. Equ.*, **21**, 3375–3420 (2021).
39. Mikhailov V. P., *Partial Differential Equations* [in Russian], Nauka, Moscow (1976).
40. Nikolskii S. M., *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems*,

Springer, Berlin (1975).

Submitted April 10, 2023

Revised April 25, 2023

Accepted May 29, 2023

Sergey G. Pyatkov
Yugra State University,
16 Chekhov Street, Khanty-Mansiisk 628011, Russia;
Academy of Sciences of the Republic of Sakha (Yakutia),
33 Lenin Avenue, Yakutsk 677007, Russia
s-pyatkov@ugrasu.ru

Oleg I. Sokolkov
Yugra State University,
16 Chekhov Street, Khanty-Mansiisk 628011, Russia
sokol.oleg2012@yandex.ru