

УДК 517.955.4

СИЛЬНО НЕПРЕРЫВНЫЕ РАЗРЕШАЮЩИЕ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ

В. Е. Федоров

Аннотация. Осуществлен поиск условий на линейный замкнутый оператор, необходимых и достаточных для существования сильно непрерывного разрешающего семейства для уравнения, разрешенного относительно дробной производной Римана — Лиувилля, с соответствующим оператором при искомой функции.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-2-118-119

Ключевые слова: сильно непрерывное разрешающее семейство операторов, производная Римана — Лиувилля, задача типа Коши.

Введение. Обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ банахово пространство всех линейных ограниченных операторов из банахова пространства $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}$, через $\mathcal{C}l(\mathcal{X})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в $\mathcal{X}$, действующих в пространство $\mathcal{X}$.

При $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{X})$ рассмотрим уравнение

$$D^\alpha z(t) = Az(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где D^α — дробная производная Римана — Лиувилля порядка α . Теория разрешающих семейств операторов является распространением теории полугрупп операторов на различные классы уравнений. Аналитические разрешающие семейства для уравнения с производной Римана — Лиувилля исследовались в [1], сильно непрерывные разрешающие семейства для таких уравнений в банаховых пространствах со свойством Радона — Никодима — в [2]. В данной работе предложен подход к исследованию сильно непрерывных разрешающих семейств уравнений с производной Римана — Лиувилля в произвольном банаховом пространстве.

Теорема о существовании сильно непрерывного разрешающего семейства. Оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{X})$ называется *оператором класса* $\mathcal{C}_\alpha^R(\omega)$, если при некоторых $K, \omega \geq 0$ выполняются следующие два условия:

- (i) если $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, то $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24-11-20002.

(ii) если $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, то для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda^{m-1} (\lambda^\alpha I - A)^{-1}) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \frac{Kn!}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{n+1}}.$$

Доказано, что если $A \in \mathcal{C}_\alpha^R(\omega)$ при $\alpha > 2$, то $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Теорема. Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \{1, 2\}$, $A \in \mathcal{C}_\alpha^R(\omega)$, $r = [1/\alpha] + 1$, D_{A^r} плотно в $\mathcal{X}$. Тогда существует разрешающее семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t \geq 0\}$ для уравнения (1) такое, что $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq K t^{\alpha-m} e^{\omega t}$, в том и только в том случае, когда $A \in \mathcal{C}_\alpha^R(\omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров В. Е., Авилов А. С. Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 2. С. 461–477.
2. Глушак А. В. О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика. Математика. 2001. № 2. С. 74–77.

Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский государственный университет,
математический факультет, кафедра математического анализа,
улица Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001
kar@csu.ru

STRONGLY CONTINUOUS RESOLVING OPERATORS FAMILIES FOR EQUATIONS WITH THE RIEMANN–LIOUVILLE DERIVATIVE

V. E. Fedorov

Abstract: The search is carried out for necessary and sufficient conditions on a linear closed operator for the existence of a strongly continuous resolving family to an equation resolved with respect to the Riemann — Liouville fractional derivative, with the corresponding operator at the unknown function.

Keywords: strongly continuous resolving family of operators, Riemann — Liouville derivative, Cauchy type problem.

Vladimir E. Fedorov
Chelyabinsk State University,
Mathematics Faculty, Mathematical Analysis Department,
129 Kashirin Brothers Street, Chelyabinsk 454001, Russia