

О ВЫСОКОТОЧНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СКРЫТЫХ АТТРАКТОРОВ В КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ СИСТЕМЕ ЧУА

А. Н. Пчелинцев

Аннотация. Рассматривается адаптация к кусочно-гладкой системе Чуа разработанного ранее высокоточного численного метода построения приближений к неустойчивым решениям динамических систем с квадратичными нелинейностями на их аттракторах. Также получена модификация алгоритма Бенеттина — Вольфа для вычисления характеристических показателей Ляпунова рассматриваемой кусочно-гладкой системы для рассматриваемого режима. Разработан способ, основанный на методе наименьших квадратов, позволяющий вычислить усредненную оценку старшего показателя Ляпунова на основе данных о поведении линеаризованной динамической системы с использованием высокоточного метода на больших промежутках времени. Для скрытых аттракторов в системе Чуа получены следующие результаты: 1) фрактальная размерность скрытого хаотического аттрактора на основе статистики возвратов Пуанкаре, 2) значения характеристических показателей Ляпунова для устойчивого цикла и хаотического аттрактора с помощью разработанной модификации алгоритма Бенеттина — Вольфа; повышена его эффективность за счет использования параллельных вычислений.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-113-134

Ключевые слова: система Чуа, характеристические показатели Ляпунова, высокоточный численный метод, кусочно-гладкая система, возвраты Пуанкаре, параллельные вычисления.

1. Введение

Рассмотрим кусочно-гладкую динамическую систему Чуа [1–3]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - \mu x_1) - \alpha\psi(x_1), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2 - \gamma x_3, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\psi(x_1) = \frac{a}{2}(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|), \quad (2)$$

$\alpha, \mu = m_1 + 1, \beta, \gamma, a = m_0 - m_1, m_0$ и m_1 — параметры системы.

Заметим, что по виду функции $\psi(x_1)$ систему (1) можно назвать *системой с преобразователем типа упора* [4, с. 23, 24].

Для локализации скрытых аттракторов системы (1) в работах [1–3] используется метод описывающей функции. При этом приведены значения начальных условий, дающих приближения к этим аттракторам.

При оценке характеристик аттракторов динамических систем (например, спектра показателей Ляпунова, фрактальных размерностей и др.) важно иметь высокоточные методы построения приближений к их решениям на больших промежутках времени из-за неустойчивости решений таких систем на аттракторах. Классические численные методы могут давать большие накопления ошибок из-за конечной точности представления вещественных чисел в ЭВМ и погрешностей численного интегрирования. Заметим, что для системы Чуа на сегодня существует не так много работ, посвященных особенностям численного интегрирования системы. Поскольку функция $\psi(x_1)$ не является всюду гладкой, применение классических численных методов также усложнено тем, что переходы через плоскости $x_1 = \pm 1$ вызывают скачок погрешности метода. Например, для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью можно использовать [5–8] метод Рунге–Кутты 4-го порядка точности в областях гладкости с последующим склеиванием приближенных решений на границе. Однако ошибка определения момента времени, когда траектория пересекает такую границу, дает свой вклад в накопление общей ошибки интегрирования, которая со временем нарастает, если точное решение системы в некоторых областях неустойчиво. Заметим, что данная проблема в известной литературе достаточно редко рассматривается [6, 9, 10]. Пример системы уравнений с кусочно-гладкой правой частью лоренцева типа, для которой решения на аттракторе неустойчивы и имеют место скользящие режимы, приведен в статье [11]. В статье [12] представлена схема алгоритма численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с произвольным количеством поверхностей разрыва в виде конечного автомата, с помощью которой можно построить приближенные решения таких систем в общем виде. Данная схема предусматривает скользящие режимы.

Отметим, что в современной литературе (см., например, [13]) для кусочно-гладких систем некоторые исследователи применяют высокоточные модификации метода гармонического баланса для отыскания приближений к периодическим решениям, являющегося численно-аналитическим и достаточно трудоемким по алгоритмической реализации в общем случае.

В последние годы появилось несколько работ [14–19] автора, посвященных разработке высокоточного численного метода построения приближений к неустойчивым решениям динамических систем с квадратичными нелинейностями на их аттракторах на базе метода степенных рядов и локализации вертикальных асимптот динамических систем взрывного типа [19]. В статье [19] также была предложена идея переноса разработанного метода на негладкий случай системы (1). Заметим, что данный метод может быть применен и для проверки точности найденного приближения к неустойчивому периодическому решению системы Лоренца [20].

Для применения рассматриваемых численных схем нужно описать следу-

ющие моменты. Введем обозначение:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \alpha(x_2 - \mu x_1) - \alpha\psi(x_1) \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -\beta x_2 - \gamma x_3 \end{bmatrix}.$$

Перепишем систему (1) в векторной форме:

$$\dot{X} = F(X),$$

где $X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^\top$.

Заметим, что функция $\psi(x_1)$ глобально липшицева:

$$\begin{aligned} |\psi(x_1) - \psi(y_1)| &\leq \frac{|a|}{2}(|x_1 + 1| - |y_1 + 1|) - (|x_1 - 1| - |y_1 - 1|) \\ &\leq \frac{|a|}{2}(|x_1 + 1| - |y_1 + 1|) + (|x_1 - 1| - |y_1 - 1|), \end{aligned}$$

по свойству модуля $||r| - |w|| \leq |r - w|$ имеем

$$|\psi(x_1) - \psi(y_1)| \leq \frac{|a|}{2}(|x_1 - y_1| + |x_1 - y_1|) \leq l|x_1 - y_1|$$

с константой Липшица $l = |a|$.

Поскольку остальные компоненты векторной функции $F(x_1, x_2, x_3)$ линейны, то функция F удовлетворяет условию Липшица. Тогда решение системы (1) существует и единственno для любых начальных условий [21].

По свойству функции $\psi(x_1)$

$$|\psi(x_1)| \leq |a||x_1|$$

имеем оценку

$$|\alpha(x_2 - \mu x_1) - \alpha\psi(x_1)| \leq ((|\alpha\mu| + |a|)|x_1| + |\alpha||x_2|) \leq n_1(|x_1| + |x_2| + |x_3|) = n_1\|X\|_1,$$

где $n_1 = \max\{|\alpha\mu| + |a|, |\alpha|, 1\}$. Аналогично

$$|x_1 - x_2 + x_3| \leq \|X\|_1, \quad |-\beta x_2 - \gamma x_3| \leq n_3\|X\|_1,$$

где $n_3 = \max\{1, |\beta|, |\gamma|\}$. Тогда

$$\|F(X)\|_1 \leq (n_1 + 1 + n_3)\|X\|_1 = L(\|X\|_1),$$

причем функция $L(\varphi)$ удовлетворяет условию Осгуда [22]. Таким образом, все решения системы (1) нелокально продолжаемы вправо.

В настоящей статье будем исследовать два скрытых аттрактора в системе (1), существование которых доказано в статье [1]. Также в статье [1] приведены начальные условия, близкие к скрытым аттракторам, и доказан их тип для значений параметров $\alpha = 8.4$, $\beta = 12$, $\gamma = -0.005$, $m_0 = -1.2$ и $m_1 = -0.05$.

1. Устойчивый цикл с циклической частотой

$$\omega \approx 3.2396 \quad (3)$$

и приближение к его начальным условиям:

$$X(0) = \begin{bmatrix} 11.7546 \\ 9.7044 \\ -16.7367 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

2. Хаотический аттрактор:

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1.5187 \\ 0.0926 \\ -2.1682 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Целью настоящей статьи является адаптация высокоточного численного метода для систем с квадратичной правой частью к кусочно-гладкой системе (1). На базе данного метода провести исследования режимов (4) и (5) и решить следующие задачи.

1. Модифицировать алгоритм Бенеттина — Вольфа для гладких систем при вычислении характеристических показателей Ляпунова системы (1) для рассматриваемого режима.

2. Разработать способ, основанный на методе наименьших квадратов, позволяющий вычислить усредненную оценку старшего показателя Ляпунова на основе данных о поведении линеаризованной динамической системы на больших промежутках времени.

3. Вычислить фрактальную размерность для режима (5) на основе статистики возвратов Пуанкаре.

4. Вычислить значения характеристических показателей Ляпунова для режимов (4) и (5) с помощью разработанной модификации алгоритма Бенеттина — Вольфа; повысить его эффективность за счет использования параллельных вычислений.

2. Описание численного метода

Модули, стоящие в правой части первого уравнения системы (1), определяют три области, разделенные плоскостями с уравнениями

$$x_1 = 1 \quad (6)$$

и

$$x_1 = -1, \quad (7)$$

которым будут соответствовать свои гладкие системы. Введем номер области j :

- 1) $j = 0$ при $x_1 < -1$,
- 2) $j = 1$ при $x_1 \in [-1, 1]$,
- 3) $j = 2$ при $x_1 > 1$.

Перепишем систему (1) в общем виде для введенных областей:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = q_j + p_j x_1 + \alpha x_2 \equiv w_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2 - \gamma x_3, \end{cases} \quad (8)$$

где $q_0 = c$, $p_0 = d$, $q_1 = 0$, $p_1 = b$, $q_2 = -c$, $p_2 = d$; $b = -\alpha(m_0 + 1)$, $c = a\alpha$, $d = -\mu\alpha$.

Представим решение системы (8) в области с номером j в виде степенных рядов:

$$x_1(t) = \xi_{1,0}^{(j)} + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{1,i}^{(j)} t^i, \quad x_2(t) = \xi_{2,0}^{(j)} + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{2,i}^{(j)} t^i, \quad x_3(t) = \xi_{3,0}^{(j)} + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{3,i}^{(j)} t^i, \quad (9)$$

сходящихся на некотором отрезке времени $[-\tau, \tau]$. В общем случае значение τ ограничено и зависит от выбора начальных условий [14, 19].

Отметим, что, исходя из формул (9), $\xi_{1,0}^{(j)}$, $\xi_{2,0}^{(j)}$ и $\xi_{3,0}^{(j)}$ — заданные значения начальных условий для системы (8) в рассматриваемой области с номером j .

Коэффициенты разложения в ряды (9) имеют вид [16, 17]

$$\xi_{1,1}^{(j)} = q_j + p_j \xi_{1,0}^{(j)} + \alpha \xi_{2,0}^{(j)}, \quad \xi_{2,1}^{(j)} = \xi_{1,0}^{(j)} - \xi_{2,0}^{(j)} + \xi_{3,0}^{(j)}, \quad (10)$$

$$\xi_{3,1}^{(j)} = -\beta \xi_{2,0}^{(j)} - \gamma \xi_{3,0}^{(j)}; \quad (11)$$

при $i \geq 2$

$$\xi_{1,i}^{(j)} = \frac{p_j \xi_{1,i-1}^{(j)} + \alpha \xi_{2,i-1}^{(j)}}{i}, \quad \xi_{2,i}^{(j)} = \frac{\xi_{1,i-1}^{(j)} - \xi_{2,i-1}^{(j)} + \xi_{3,i-1}^{(j)}}{i}, \quad (12)$$

$$\xi_{3,i}^{(j)} = \frac{-\beta \xi_{2,i-1}^{(j)} - \gamma \xi_{3,i-1}^{(j)}}{i}. \quad (13)$$

Чтобы при вычислениях оперировать положительными (или отрицательными) шагами по времени, необходимо иметь гарантированную оценку величины τ . Поэтому перепишем систему (8) в векторной форме [16, 17]:

$$\dot{X} = A_0^{(j)} + A_1^{(j)} X,$$

где

$$A_0^{(j)} = [q_j \ 0 \ 0]^\top, \\ A_1^{(j)} = \begin{bmatrix} p_j & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Затем вычисляем значения функций

$$h_1(\xi_{1,0}^{(j)}, \xi_{2,0}^{(j)}, \xi_{3,0}^{(j)}) = |\xi_{1,0}^{(j)}| + |\xi_{2,0}^{(j)}| + |\xi_{3,0}^{(j)}|, \quad (15)$$

$$h_2(\xi_{1,0}^{(j)}, \xi_{2,0}^{(j)}, \xi_{3,0}^{(j)}) = \begin{cases} \|A_0^{(j)}\| + \|A_1^{(j)}\| \cdot h_1(\xi_{1,0}^{(j)}, \xi_{2,0}^{(j)}, \xi_{3,0}^{(j)}), & \text{если } h_1 > 1, \\ \|A_0^{(j)}\| + \|A_1^{(j)}\| & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (16)$$

$$\tau(\xi_{1,0}^{(j)}, \xi_{2,0}^{(j)}, \xi_{3,0}^{(j)}) = \frac{1}{h_2(\xi_{1,0}^{(j)}, \xi_{2,0}^{(j)}, \xi_{3,0}^{(j)}) + \delta_{pw}}, \quad (17)$$

где

$$\|A_0^{(j)}\| = \|A_0^{(j)}\|_1 = |q_j|, \quad \|A_1^{(j)}\| = \|A_1^{(j)}\|_1 = \max\{|p_j| + 1, |\alpha| + |\beta| + 1, |\gamma| + 1\},$$

δ_{pw} — любое положительное число.

Алгоритм построения дуги траектории системы [8] подробно описан в тезисах [23] с использованием высокоточных вычислений на базе библиотеки MPFR C++ [24] в случае, когда дуга траектории на рассматриваемом отрезке времени целиком находится в области с номером j . Отметим, что метод аналогичен методам Рунге-Кутты, но с гибким изменением порядка и выбором шага, обеспечивающим сходимость рядов (9).

Далее рассмотрим модификацию данного алгоритма с учетом кусочно-гладкой правой части системы (1).

Введем векторы

$$\Xi_i^{(j)} = [\xi_{1,i}^{(j)} \ \xi_{2,i}^{(j)} \ \xi_{3,i}^{(j)}]^\top.$$

Пусть T — длина отрезка интегрирования. Зададим такое представление вещественного числа, чтобы

$$\varepsilon_m \ll \varepsilon_{pw},$$

где ε_m — машинный эпсилон и ε_{pw} — точность оценки общего члена ряда (9). Таким образом, суммирование при использовании формулы (9) прекращается при таком значении $i = i^*$, когда

$$\|\Xi_{i^*}^{(j)}\| \cdot |\Delta t|^{i^*} < \varepsilon_{pw}, \quad (18)$$

где Δt — шаг интегрирования. Отметим, что для сходимости ряда величину Δt нужно выбирать так:

$$0 < \Delta t \leq \tau(\Xi_0^{(j)}).$$

Рассмотрим более подробно алгоритм построения дуги траектории системы (1) на отрезке времени $[0, T]$. В начале алгоритма по начальному условию для координаты x_1 определяем, в какой части фазового пространства мы находимся, т. е. номер j . Далее делаем шаг по времени $\Delta t = \tau(\Xi_0^{(j)})$ вперед. При этом нужно запомнить полученные полиномы $\tilde{x}_1(t)$, $\tilde{x}_2(t)$ и $\tilde{x}_3(t)$, аппроксимирующие соответствующие фазовые координаты $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ на отрезке времени $[0, \Delta t]$.

Если $\tilde{x}_1(\Delta t)$ не принадлежит текущей части фазового пространства, то необходимо с высокой точностью найти момент времени $t = \Delta t_{new}$, когда траектория пересекает одну из плоскостей (6) или (7). Для этого методом секущих численно решается уравнение

$$\tilde{x}_1(t) - g = 0, \quad (19)$$

где $g = 1$ или $g = -1$, с заданной погрешностью δ_{sec} . Заметим, что под достижением величины δ_{sec} в итерационном процессе

$$\Delta t^{[k]}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (20)$$

поиска приближений к корню Δt_{new} уравнения (19) понимается достижение такого номера $k = k^*$, когда

$$|\Delta t^{[k^*]} - \Delta t^{[k^*-1]}| < \delta_{sec}.$$

Далее вектор начальных условий принимается равным

$$\Xi_0^{(j_{new})} = [g \quad \tilde{x}_2(\Delta t^{[k^*]}) \quad \tilde{x}_3(\Delta t^{[k^*]})]^\top,$$

где j_{new} — номер новой области, в которую мы попали, и поскольку система (8) динамическая, начальный момент времени принимается равным нулю.

Преимущества метода секущих при решении данной задачи:

- 1) для достижения точности ε_{sec} этим методом требуется $O(\ln \ln(1/\varepsilon_{sec}))$ итераций, как и в методе Ньютона [25, с. 335, 336];
- 2) не требуется построения выражений и вычисления производной функции $\tilde{x}_1(t)$;
- 3) перед началом итерационного процесса (20) имеем отрезок $[0, \Delta t]$ локализации корня.

Отметим, что в работах [6, 10] во избежание скачка погрешности приближенного решения в методе Рунге-Кутты 4-го порядка точности для корректировки шага интегрирования используются интерполяционные полиномы с интерполяцией назад и метод Ньютона для численного решения уравнения относительно шага с экстраполяцией до поверхности границы раздела областей, чтобы не вычислять значения правой части системы в другой области. В нашем случае аппроксимирующие полиномы фазовые координаты $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ строятся по коэффициентам рядов (9).

Описанный алгоритм является базовым для всех дальнейших исследований характеристик аттракторов в системе (1). Сначала рассмотрим его применение для вычислений спектра показателей Ляпунова.

3. Модификация алгоритма Бенеттина — Вольфа для вычисления оценок значений характеристических показателей Ляпунова

Для вычисления оценок значений характеристических показателей Ляпунова на практике обычно используют алгоритм Бенеттина — Вольфа [26, 27]. Однако его применение напрямую к системе (1) осложнено тем, что она не является гладкой. Поэтому осуществим следующую процедуру.

Рассмотрим разностный аналог частной производной функции w_1 и матрицы Якоби для системы (8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} &\simeq \frac{q_{j_{new}} + p_{j_{new}}(x_1 + \Delta) + \alpha x_2 - q_j - p_j x_1 - \alpha x_2}{\Delta} \\ &= p_{j_{new}} + \frac{q_{j_{new}} - q_j + (p_{j_{new}} - p_j)x_1}{\Delta}, \\ \tilde{J}_{j \mapsto j_{new}}(x_1) &= \begin{bmatrix} p_{j_{new}} + \frac{q_{j_{new}} - q_j + (p_{j_{new}} - p_j)x_1}{\Delta}, & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (21)$$

где Δ — достаточно малая величина, $p_{j_{new}}$ и $q_{j_{new}}$ — значения коэффициентов системы (8) в новой области фазового пространства с номером j_{new} , $j \mapsto j_{new}$

означает переход из текущей области с номером j в область с номером j_{new} . Заметим, что когда $j_{new} = j$, матрица в формуле (21) совпадает с матрицей в (14).

Выбор величины Δ осуществляется следующим образом. Пусть $\delta_{x_1} > 0$ — заданная малая величина. Если $j_{new} < j$, то $\Delta = -\delta_{x_1}$ (идет движение в сторону уменьшения координаты x_1); иначе $\Delta = \delta_{x_1}$. В нашем случае направление возрастания нумерации областей фазового пространства совпадает с направлением возрастания координаты x_1 .

Пусть $x_4(t)$, $x_5(t)$ и $x_6(t)$ — возмущения для координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ соответственно. Тогда уравнения относительно данных возмущений имеют вид

$$\dot{x}_4 = \left(p_{j_{new}} + \frac{q_{j_{new}} - q_j + (p_{j_{new}} - p_j)x_1}{\Delta} \right) x_4 + \alpha x_5, \quad (22)$$

$$\dot{x}_5 = x_4 - x_5 + x_6,$$

$$\dot{x}_6 = -\beta x_5 - \gamma x_6.$$

Перепишем уравнение (22), выделив в нем линейную и квадратичную части:

$$\dot{x}_4 = \left(p_{j_{new}} + \frac{q_{j_{new}} - q_j}{\Delta} \right) x_4 + \alpha x_5 + \frac{p_{j_{new}} - p_j}{\Delta} x_1 x_4.$$

По аналогии с подходом, используемым в работах автора [17, 18], расширим систему (8), дополнив ее уравнениями для фазовых координат возмущений. При этом введем вектор

$$\widehat{X}(t) = [x_1(t) \ \dots \ x_6(t)]^\top$$

и матрицы

$$\widehat{A}_0^{(j)} = [q_j \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top,$$

$$\widehat{A}_1^{(j)} = \begin{bmatrix} p_j & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{j_{new}} + \frac{q_{j_{new}} - q_j}{\Delta} & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix},$$

$$\widehat{Q}_1^{(j)} = \widehat{Q}_2^{(j)} = \widehat{Q}_3^{(j)} = \widehat{Q}_5^{(j)} = \widehat{Q}_6^{(j)} = \mathbf{O},$$

$$\widehat{Q}_4^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{p_{j_{new}} - p_j}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Расширенная динамическая система имеет вид

$$d\widehat{X}/dt = \widehat{A}_0^{(j)} + \widehat{A}_1^{(j)} \widehat{X} + \Phi(\widehat{X}), \quad (23)$$

где

$$\Phi(\widehat{X}) = [\varphi_1(\widehat{X}) \dots \varphi_6(\widehat{X})]^\top, \quad \varphi_p(\widehat{X}) = \langle Q_p \widehat{X}, \widehat{X} \rangle, \quad p = 1, \dots, 6.$$

Получим [17, 18] рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов рядов возмущений

$$x_4(t) = \xi_{4,0}^{(j)} + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{4,i}^{(j)} t^i, \quad x_5(t) = \xi_{5,0}^{(j)} + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{5,i}^{(j)} t^i, \quad x_6(t) = \xi_{6,0}^{(j)} + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{6,i}^{(j)} t^i, \quad (24)$$

$$\xi_{4,i}^{(j)} = \frac{(p_{j_{new}} + \frac{q_{j_{new}} - q_j}{\Delta}) \xi_{4,i-1}^{(j)} + \alpha \xi_{5,i-1}^{(j)} + \frac{p_{j_{new}} - p_j}{\Delta} \sum_{k=0}^i \xi_{1,k}^{(j)} \xi_{4,i-k}^{(j)}}{i}, \quad (25)$$

$$\xi_{5,i}^{(j)} = \frac{\xi_{4,i-1}^{(j)} - \xi_{5,i-1}^{(j)} + \xi_{6,i-1}^{(j)}}{i}, \quad (26)$$

$$\xi_{6,i}^{(j)} = \frac{-\beta \xi_{5,i-1}^{(j)} - \gamma \xi_{6,i-1}^{(j)}}{i}. \quad (27)$$

Формулы (25)–(27) являются дополнением формул (10)–(13).

Значение числа τ , определяющего отрезок сходимости степенных рядов (9) и (24), вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\widehat{A}_0^{(j)}\| &= \|\widehat{A}_0^{(j)}\|_1 = |q_j|, \\ \|\widehat{A}_1^{(j)}\| &= \|\widehat{A}_1^{(j)}\|_1 = \max \left\{ |p_j| + 1, |\alpha| + |\beta| + 1, |\gamma| + 1, \left| p_{j_{new}} + \frac{q_{j_{new}} - q_j}{\Delta} \right| + 1 \right\}, \\ \|\widehat{Q}_1^{(j)}\| &= \|\widehat{Q}_2^{(j)}\| = \|\widehat{Q}_3^{(j)}\| = \|\widehat{Q}_5^{(j)}\| = \|\widehat{Q}_6^{(j)}\| = 0, \\ \|\widehat{Q}_4^{(j)}\| &= \left| \frac{p_{j_{new}} - p_j}{\Delta} \right|, \\ \mu &= 6 \max_{p=1, \dots, 6} \|\widehat{Q}_p^{(j)}\| = 6 \left| \frac{p_{j_{new}} - p_j}{\Delta} \right|, \\ h_1(\xi_{1,0}^{(j)}, \dots, \xi_{6,0}^{(j)}) &= \|\Xi_i^{(j)}\| = \|\Xi_i^{(j)}\|_1 = \sum_{p=1}^6 |\xi_{p,0}^{(j)}|, \\ h_2(\xi_{1,0}^{(j)}, \dots, \xi_{6,0}^{(j)}) &= \begin{cases} \mu h_1^2 + (\|\widehat{A}_1^{(j)}\| + 2\mu) h_1 + \|\widehat{A}_0^{(j)}\|, & \text{если } h_1 > 1, \\ \|\widehat{A}_0^{(j)}\| + \|\widehat{A}_1^{(j)}\| + \mu & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \tau(\xi_{1,0}^{(j)}, \dots, \xi_{6,0}^{(j)}) &= \frac{1}{h_2 + \delta_{pw}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Применение алгоритма Бенеттина — Вольфа для вычисления оценок $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ и $\tilde{\lambda}_3$ характеристических показателей Ляпунова в случае систем с квадратичной правой частью подробно описано в статье [18]. Напомним, что заданный отрезок времени $[0, T_L]$ (обычно достаточно большой), на котором мы будем искать оценки показателей, делится на отрезки одинаковой длины

$$\tau_M = \frac{T_L}{M},$$

где M — количество таких отрезков. Далее, используя процесс Грама — Шмидта (ГШ) [26; 27, с. 163–165; 28, с. 126–132], формируем три начальных условия для системы (23), у которых три первые координаты совпадают соответственно — они являются координатами точки, близкой к аттрактору. Остальные координаты — это нормированные и ортогоанализованные возмущения.

Выбор значения M — это отдельная проблема. В [26, с. 294, 297] указано, что имеется некоторая неустойчивость в значениях самого младшего отрицательного показателя λ_3 , так как «элементы объема, включающие отрицательные направления экспоненты, затухают экспоненциально быстро», и рекомендуется отслеживать установившиеся оценки показателей Ляпунова в зависимости от изменения τ_M . Поэтому вычисление младшего показателя лучше реализовывать для малых значений τ_M .

В случае хаотического аттрактора для системы третьего порядка частое применение ГШ-процесса (при малых значениях τ_M) вызывает потерю ориентации в фазовом пространстве [26, с. 299], внося шум в получаемое значение оценки старшего $\tilde{\lambda}_1 > 0$ показателя. При больших значениях τ_M элементы объема фазового пространства становятся слишком большими, демонстрируя экспоненциальный рост во времени. Это дает возможность улучшить оценку $\tilde{\lambda}_1$, но применение классических численных методов с малыми фиксированными порядками точности и стандартного представления вещественных чисел в ЭВМ (например, в языке С) приведет к большим ошибкам интегрирования и переполнению используемых переменных в программном коде.

Использование описанной высокоточной численной схемы на базе метода степенных рядов совместно с библиотекой MPFR C++ [24, 29] для представления чисел произвольной точности (тип данных `mpreal` с перегруженными арифметическими операциями и дружественными математическими функциями) позволяет избежать переполнений и контролировать накопление ошибки численного интегрирования при варьировании точности ε_{pw} оценки общего члена рядов (9) и (24). Таким образом, мы можем увеличить значение τ_M для уменьшения шума в получаемом значении $\tilde{\lambda}_1$.

При переходе из одной области фазового пространства в другую (изменение номера j) по алгоритму, описанному в разд. 2, вычисляется приближенное значение шага Δt_{new} по времени, когда траектория системы (1) пересечет одну из плоскостей (6) или (7). При достижении данной границы, система (23) будет иметь квадратичную правую часть (внутри области она линейна), при этом значение j_{new} — это индекс новой области. Из-за малости величины δ_{x_1} значения коэффициентов данной системы очень велики, но полученная оценка длины (28) отрезка сходимости рядов (9) и (24) в работе [16] гарантирует их сходимость на шаге интегрирования $\Delta t = \tau$. Взрывной рост фазовых координат при этом невозможен, поскольку из формулы (28) следует, что

$$\Delta t = O(\|\Xi_0^{(j)}\|^{-2}) \quad (29)$$

при $\|\Xi_0^{(j)}\| \rightarrow \infty$, т. е. величина Δt будет достаточно малой, а после перехода в

новую область система (23) станет линейной. Периодическое применение ГШ-процесса также останавливает резкий рост фазовых координат возмущений.

Стоит отметить следующую особенность описанной схемы вычислений оценок значений характеристических показателей Ляпунова. Исходя из оценки (29), экспоненциальный рост фазовых координат дает экспоненциальное затухание значения шага по времени, что ведет к резкому росту времени вычислений. Поскольку для системы третьего порядка необходимо три раза решать систему (23) между ГШ-процессами, данную процедуру можно распараллелить. Как было описано выше, организация вычислений происходит с использованием вещественных чисел произвольной точности, что делает невозможным на данный момент применение GPU. Поскольку мы имеем три независимых процесса, использующих небольшой объем вычислительных ресурсов, параллельные вычисления можно организовать в рамках одной ЭВМ на CPU, например, в многопоточном режиме. Заметим, что параллельные вычисления на GPU на сегодняшний день используются при анализе нескольких предельных решений ОДУ, в том числе скрытых аттракторов (например, в работах [30, 31]).

Чтобы проверить точность найденных оценок $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ и $\tilde{\lambda}_3$, воспользуемся следующим соотношением [32, с. 136]:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \langle \operatorname{div} F \rangle, \quad (30)$$

где

$$\langle \operatorname{div} F \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{div} F(x_1(t)) dt,$$

при этом

$$\operatorname{div} F(x_1) = -\alpha\mu - \alpha\psi'_{x_1} - 1 - \gamma.$$

Тогда вычисление правой части равенства (30) сводится к вычислению среднего значения $\langle \psi'_{x_1} \rangle$ функции $\psi'_{x_1}(x_1(t))$ на отрезке времени $[0, T]$ при больших значениях T .

Исходя из графика функции $\psi(x_1)$, значения

$$\psi'_{x_1}(x_1) = \begin{cases} a, & \text{если } x_1 \in (-1, 1), \\ 0, & \text{если } x_1 \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

Поскольку в алгоритме, описанном в разд. 2, рассчитывается такое значение шага по времени, когда траектория пересечет одну из плоскостей (6) или (7), а также по виду частей, составляющих функцию $\psi'_{x_1}(x_1(t))$, для реализации вычисления $\langle \psi'_{x_1} \rangle$ используется метод левых прямоугольников с переменным шагом интегрирования таким же, какой используется в данном алгоритме. Следовательно, внутри шага не произойдет скачка значения $\psi'_{x_1}(x_1(t))$.

4. Результаты вычислений значений $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ и $\tilde{\lambda}_3$ для скрытых аттракторов системы (1)

Пусть b_m — число бит под мантиссу вещественного числа. Для вычислений были подобраны такие точности, что у получаемых значений показателей верны

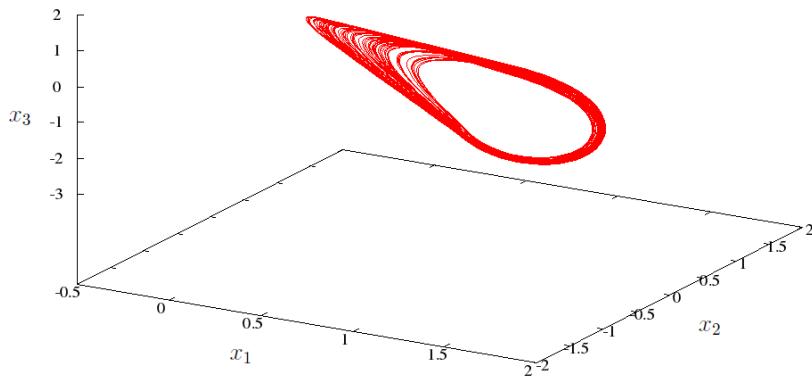


Рис. 1. Траектория системы (1), соответствующая скрытому хаотическому аттрактору.

первые 4 знака в дробной части:

$$b_m = 300, \text{ тогда } \varepsilon_m = 9.8 \cdot 10^{-91};$$

$$\delta_{pw} = 10^{-10}, \varepsilon_{pw} = 10^{-80}, \delta_{sec} = 10^{-60}, \delta_{x_1} = 10^{-2}.$$

Отметим, что уменьшение величины δ_{x_1} не дает значительного эффекта в результатах вычислений.

Для начальных условий (5) была получена точка, более близкая к скрытому хаотическому аттрактору в системе (1), по алгоритму, описанному в разд. 2:

$$X(0) = \begin{bmatrix} 0.242607564664894625733914154575786941050105924448969850851 \\ -0.129154013908900093933869116916933583688948511046159634882 \\ 0.265287927489326246666551239611062113982412884174965132271 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Таблица 1. Результаты вычислений оценок $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ и $\tilde{\lambda}_3$ для различных значений числа M

M	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$
20000	0.2121	-0.0266	-4.1824
10000	0.1964	-0.0123	-4.1950
5000	0.1834	-0.0126	-4.1987
2000	0.1760	-0.0039	-4.2011
500	0.1610	-0.0028	-3.5639
200	0.1614	0.0036	-1.6694
100	0.1634	0.0013	-0.8706
50	0.1621	0.0017	-0.4860
29	0.1638	0.0020	-0.3221

Используя описанную выше модификацию алгоритма Бенеттина — Вольфа, при $T_L = 1000$ для точки (31) при разных значениях числа M усредненные значения оценок $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ и $\tilde{\lambda}_3$ сведены в табл. 1, откуда видна стабилизация показателя $\tilde{\lambda}_1$ при уменьшении значения M . Также можно отметить стабильность в значениях $\tilde{\lambda}_3$ при больших значениях числа M , что и было указано в разд. 3 данной статьи. Тогда можно сделать вывод о том, что для скрытого хаотического аттрактора, представленного на рис. 1, значения

$$\tilde{\lambda}_1 \approx 0.16, \quad \tilde{\lambda}_2 \approx 0, \quad \tilde{\lambda}_3 \approx -4.2, \quad \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3 \approx -4.04.$$

При этом для $T = T_L$ средние значения

$$\langle \psi'_{x_1} \rangle \approx -0.6, \quad \langle \operatorname{div} F \rangle \approx -3.93.$$

Таким образом, в равенстве (30) левая и правая части отличаются примерно на 0.11, что говорит о приемлемой точности вычисления оценок значений характеристических показателей Ляпунова.

Применение параллельных вычислений для расчета оценок показателей Ляпунова дает следующие результаты. В многопоточном режиме (используемая операционная система — Ubuntu Linux) время вычислений при $M = 29$ составляет 47 мин на процессоре AMD Ryzen 7 5700G (4.67 ГГц, 16-ти потоковый), температура процессора достигает 70°C, загрузка — два-три ядра (обычный режим работы процессора, при котором нет вычислительных задач, — 40°C). Контроль температуры осуществлялся в приложении Psensor. Время вычислений для последовательного алгоритма (загружено одно ядро, температура — 64°C) — 71 мин; с использованием библиотеки libopenmpi (технология Open MPI) (загрузка — 4 ядра, максимальная температура процессора составляет 78°C) — 59 мин. Увеличение загрузки процессора и времени вычислений связано с тем, при работе с MPI-приложениями происходит запуск нескольких процессов на одном (если позволяют ресурсы) или нескольких компьютерах. В многопоточном же режиме параллельные вычисления выполняются в виде нескольких потоков (нитей) в одном процессе, при этом операционная система может оптимизировать загрузку ядер в рамках данного процесса, в отличие от многопроцессного режима работы, где синхронизация процессов выполняется программно.

Поскольку рассматриваемый метод оценки характеристических показателей Ляпунова позволяет увеличить отрезок между ГШ-процессами, мы можем построить график зависимости нормы $\|\hat{X}\|_2$ от времени, например, на первом шаге по алгоритму, описанному в разд. 2. При $T_L = 1000$ и $M = 29$ величина $\tau_M \approx 34.48$. Данный график представлен на рис. 2. Также на этом рисунке построен график усредненной зависимости $\|\hat{X}\|_2$ от t

$$\overline{\|\hat{X}\|_2} = b_0 + b_1 e^{\tilde{\lambda}_{1a} t},$$

где коэффициенты b_0 , b_1 и $\tilde{\lambda}_{1a}$ определяются по методу наименьших квадратов в математическом пакете Maxima [33]:

$$b_0 \approx 8.4, \quad b_1 \approx 0.26, \quad \tilde{\lambda}_{1a} \approx 0.272.$$

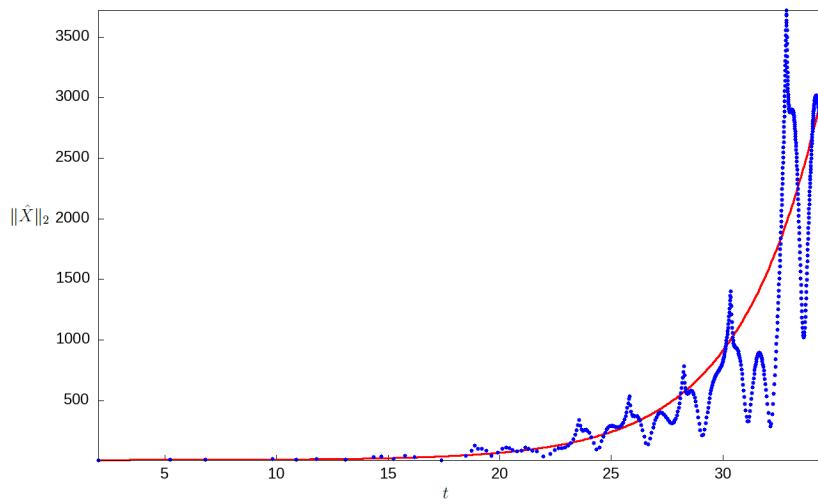


Рис. 2. График зависимости нормы $\|\hat{X}\|_2$ от t и усредненная кривая для вычисления $\tilde{\lambda}_{1a}$.

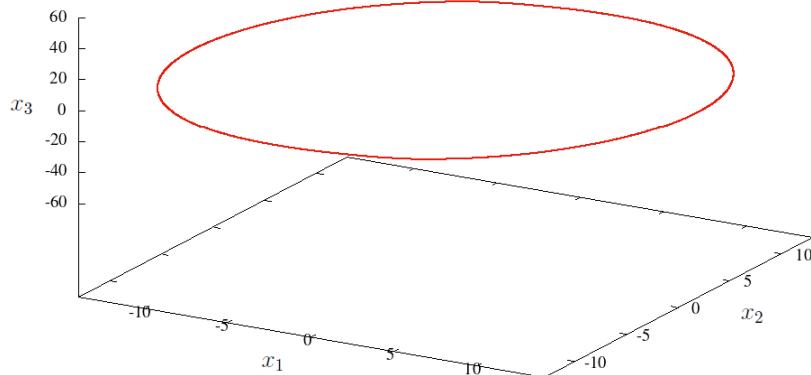


Рис. 3. Траектория системы (1), соответствующая скрытому аттрактору — предельному циклу.

Таким образом, получена еще одна оценка $\tilde{\lambda}_{1a}$ старшего показателя Ляпунова. При этом значение

$$\tilde{\lambda}_{1a} + \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3 \approx -3.928,$$

которое более близко к величине $\langle \operatorname{div} F \rangle$.

Отметим, что достоинство данного способа вычисления старшего показателя Ляпунова по сравнению с алгоритмом Бенеттина — Вольфа в том, что получаемое значение показателя учитывает значения фазовых координат на отрезке времени $[0, \tau_M]$, а не только в конечный момент времени.

По аналогии была получена точка, более близкая к предельному циклу, чем

(4):

$$X(0) = \begin{bmatrix} 10.9947740082418782801240113997819195633739779444994538757 \\ 9.61981334895099741414351646822521979405421000896426828936 \\ -11.8170827045443885649065273583176924298515470429370283924 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Расчеты для данного скрытого аттрактора проводились для значения $T_L = 194.2$, кратного периоду цикла (данная величина будет далее определена). При $M = 10$ значение $\tilde{\lambda}_1 \approx 0.0068 \approx 0$. Значения остальных показателей определялись при $M = 20000$, поскольку они отрицательные:

$$\tilde{\lambda}_2 \approx -0.042, \quad \tilde{\lambda}_3 \approx -8.43.$$

Тогда

$$\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3 \approx -8.472.$$

Значение

$$\langle \operatorname{div} F \rangle \approx -8.457,$$

что обеспечивает достоверность найденных оценок.

Исследуемая траектория показана на рис. 3.

5. Устойчивость по Пуассону точек скрытых аттракторов

В работах [15, 16] численно исследованы точки предельных решений на устойчивость по Пуассону, что позволило понять, имеем ли мы квазипериодический или хаотический режим.

Напомним [21], что точка y фазового пространства называется *положительно устойчивой по Пуассону* (обозначение P^+), если для любой окрестности U точки y и для любого $T_P > 0$ найдется такое значение времени $t \geq T_P$, что траектория динамической системы попадет в окрестность U . Аналогично если найдется такое $t \leq -T_P$, при котором траектория попадет в окрестность U , то точка y *отрицательно устойчива по Пуассону* (обозначение P^-). Точка, устойчивая P^+ и P^- , называется просто *устойчивой по Пуассону*. Если каждая точка траектории устойчива по Пуассону, то такая траектория называется *устойчивой по Пуассону*.

Из ограниченности предельных решений диссипативных систем следует [21, 27], что любой установившийся режим колебаний описывается устойчивыми по Пуассону траекториями. Данное утверждение относится и к динамическому хаосу. Если рассматривается траектория, отличная от положения равновесия, то устойчивой по Пуассону она будет в том случае, если обладает свойством возвращаться в сколь угодно малую ε -окрестность каждой своей точки бесконечное число раз. Такие возвраты называют *возвратами Пуанкаре*. В [27, с. 146] указано, что «изучение статистики возвратов Пуанкаре — мощное средство анализа и классификации динамических режимов. По-видимому, потенциальные возможности этого подхода еще не полностью исчерпаны в современной

нелинейной динамике». Например, для периодических режимов возвраты следуют друг за другом регулярно. Тогда [27, с. 145] «динамический хаос — это такая ситуация, когда возвраты Пуанкаре в ε -окрестность стартовой точки не проявляют регулярности, интервал времени между двумя последовательными возвратами оказывается каждый раз другим и возникает некоторое статистическое распределение времен возврата». Пример анализа возвратов Пуанкаре, основанного на теореме Каца [34, с. 67], для дискретных и непрерывных динамических систем с хаотическими аттракторами приведен в работах [35, 36].

Для исследования возвратов Пуанкаре разработана программа [37], которая собирает статистику возвратов. Алгоритм ее работы следующий.

Пусть $X_0 = X(0)$ — начальная точка для системы (1), соответствующая исследуемой, в частности, близкая к скрытому аттрактору. Отслеживание возвратов необходимо производить не сразу, а через некоторый заданный момент времени t_s , чтобы выйти из ε -окрестности точки X_0 . Значения $\varepsilon < 1$ при этом перебираются из некоторого убывающего конечного набора

$$\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_K$$

вещественных чисел. Для каждого значения ε_m ($m = 0, \dots, K$) организуется цикл по времени от $t = t_s$ до некоторого большого значения T с заданным малым шагом $\Delta\tau$ вычисления приближенных значений фазовых координат $X(t)$ системы (1) по алгоритму, описанному в разд. 2, в момент времени t , причем фиксируются такие моменты $t = t_k$, когда

$$\|X(t_k) - X_0\|_2 < \varepsilon_m,$$

где $k = 1, \dots, k_{\max}$. Заметим, что в данном случае фиксируются моменты вхождения в ε_m -окрестность [36].

После этого вычисляется среднее время возврата [35, с. 5]

$$\overline{\tau(\varepsilon_m)} = \frac{1}{k_{\max}} \sum_{k=1}^{k_{\max}} (t_{k+1} - t_k) = \frac{t_{k_{\max}} - t_1}{k_{\max}}.$$

В случае хаотического аттрактора высокоточные вычисления важны для получения более точной статистики возвратов.

По следствию из теоремы Каца [35, с. 4]

$$\overline{\tau(\varepsilon)} = C\varepsilon^{-d},$$

где C — некоторая постоянная, d — фрактальная размерность аттрактора.

Для начальной точки (31) получена статистика возвратов в ее окрестность по описанному алгоритму. При этом

$$t_s = 0.5, \quad \varepsilon_0 = 0.1, \quad T = T_L, \quad \varepsilon_m = \frac{\varepsilon_0}{m}$$

для $m \geq 1$. Далее по методу наименьших квадратов в математическом пакете Maxima определяются коэффициенты C и d :

$$C = 0.424, \quad d = 0.877.$$

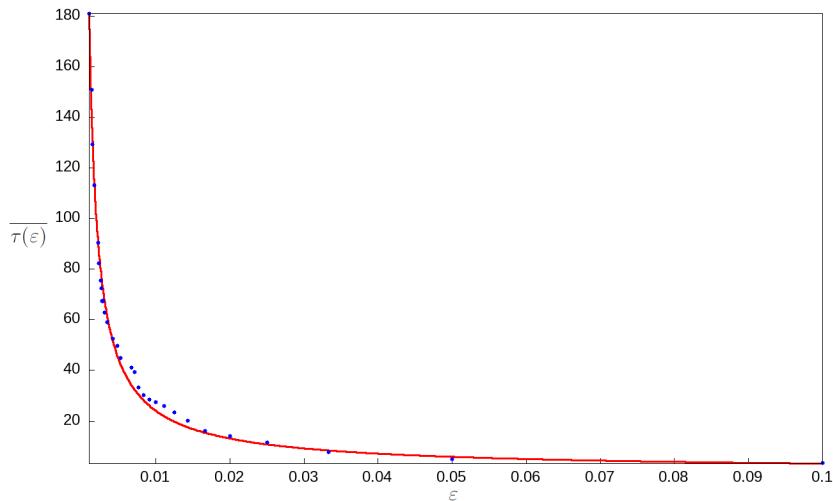


Рис. 4. Зависимость среднего времени возврата от радиуса отслеживаемой окрестности.

Коэффициент детерминации $R^2 = 99\%$, что говорит о хорошем качестве аппроксимации. На рис. 4 показаны полученные точки, соответствующие радиусу отслеживаемой окрестности и среднему времени возврата, а также аппроксимирующая кривая.

Для регулярного режима, соответствующего точке (32), определены средние времена возвратов в окрестности точки X_0 . Оказалось, что

$$\overline{\tau(\varepsilon_0)} = \dots = \overline{\tau(\varepsilon_K)} = 1.942,$$

откуда можно сделать вывод о том, что данное значение равно периоду T_p предельного цикла.

Полученное число соответствует циклической частоте (3):

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p} \approx 3.235 \approx \omega.$$

6. Заключение

В данной статье рассмотрен численный метод решения кусочно-гладкой системы обыкновенных дифференциальных уравнений Чуа с использованием высокоточных вычислений, который может быть применен для сбора статистики возвратов Пуанкаре с целью оценки фрактальной размерности рассматриваемого аттрактора. Описана реализация модификации алгоритма Бенеттина — Вольфа для данной системы, в основу которой положена рассматриваемая численная схема решения систем дифференциальных уравнений на базе метода степенных рядов, реализованная с использованием параллельных алгоритмов и арифметики произвольной точности на больших отрезках разбиения заданного промежутка времени. Программный комплекс разработан на языке C++, получено свидетельство о его регистрации [37].

Замечено, что полученные характеристики аттракторов зависят от применяемых алгоритмов, которые опираются на важные теоретические результаты. Например, на зависимость оценки области сходимости рядов в описанном высокоточном численном методе для выбора шага интегрирования от начальных условий (формула (29)) и теорему Каца для исследования устойчивости по Пуассону приведенных точек. Также отметим, что показатели Ляпунова могут отличаться для разных траекторий аттракторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kuznetsov N. V., Kuznetsova O. A., Leonov G. A., Mokaev T. N., Stankevich N. V. Hidden attractors localization in Chua circuit via the describing function method // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50, N 1. P. 2651–2656.
2. Stankevich N. V., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Chua L. O. Scenario of the birth of hidden attractors in the Chua circuit // Int. J. Bifurcation Chaos. 2017. V. 27, N 12. 1730038.
3. Kuznetsov N., Kuznetsova O., Leonov G., Vagaitsev V. Analytical-numerical localization of hidden attractor in electrical Chua's circuit // Lect. Notes Electrical Eng. 2013. V. 174. P. 149–158.
4. Красносельский М. А., Покровский А. В. Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
5. Piiroinen P. T., Kuznetsov Y. A. An event-driven method to simulate Filippov systems with accurate computing of sliding motions // ACM Trans. Math. Softw. 2008. V. 34, N 3. 13.
6. Коробицын В. В., Фролова Ю. В., Маренич В. Б. Алгоритм численного решения кусочно-сглаживаемых систем // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 2. С. 70–81.
7. Коробицын В. В., Фролова Ю. В. Алгоритм численного решения дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Мат. структуры и моделирование. 2005. № 15. С. 46–54.
8. Коробицын В. В., Маренич В. Б., Фролова Ю. В. Исследование поведения явных методов Рунге – Кутты при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Мат. структуры и моделирование. 2007. № 17. С. 19–25.
9. Коробицын В. В., Фролова Ю. В. Оценка погрешности вычисления точки пересечения продолжения кривой решения задачи Коши с поверхностью разрыва // Мат. структуры и моделирование. 2011. № 22. С. 5–14.
10. Коробицын В. В. Об определении точки пересечения кривой решения задачи Коши с поверхностью разрыва // Вычисл. технологии. 2011. Т. 16, № 4. С. 50–63.
11. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. Sliding homoclinic bifurcations in a Lorenz-type system: Analytic proofs // Chaos. 2021. V. 31. 043117.
12. Коробицын В. В., Фролова Ю. В. Представление алгоритма численного решения гибридной динамической системы с конечным множеством дискретных состояний в виде конечного автомата // Вестн. Омск. ун-та. 2013. № 4. С. 221–227.
13. Lim C. W., Wu B. S. Accurate higher-order approximations to frequencies of nonlinear oscillators with fractional powers // J. Sound Vibration. 2005. V. 281, N 3–5. P. 1157–1162.
14. Пчелинцев А. Н. Численное и физическое моделирование динамики системы Лоренца // Сиб. журн. вычисл. математики. 2014. Т. 17, № 2. С. 191–201.
15. Lozi R., Pchelintsev A. N. A new reliable numerical method for computing chaotic solutions of dynamical systems: the Chen attractor case // Int. J. Bifurcation Chaos. 2015. V. 25, No 13. 1550187.
16. Lozi R., Pogonin V. A., Pchelintsev A. N. A new accurate numerical method of approximation of chaotic solutions of dynamical model equations with quadratic nonlinearities // Chaos Solitons Fractals. 2016. V. 91. P. 108–114.
17. Pchelintsev A. N. An accurate numerical method and algorithm for constructing solutions of chaotic systems // J. Appl. Nonlin. Dyn. 2020. V. 9, N 2. P. 207–221.
18. Pchelintsev A. N. On the Poisson stability to study a fourth-order dynamical system with quadratic nonlinearities // Mathematics. 2021. V. 9, N 17. 2057.
19. Pchelintsev A. N. On a high-precision method for studying attractors of dynamical systems and systems of explosive type // Mathematics. 2022. V. 10, N 8. 1207.

20. Пчелинцев А. Н., Полуновский А. А., Юханова И. Ю. Метод гармонического баланса для отыскания приближенных периодических решений системы Лоренца // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2019. Т. 24, № 126. С. 187–203.
21. Немышкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.
22. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
23. Пчелинцев А. Н. Высокоточные вычисления для моделирования нелинейных динамических систем с аттракторами // Информатика: проблемы, методы, технологии (под ред. Д. Н. Борисова). Мат. XXII Междунар. науч.-практ. конф. им. Э. К. Алгазинова (Воронеж, 10-12 февраля 2022 г.). Воронеж, 2022. С. 437–443.
24. The high-performance C++ interface for MPFR library. <https://github.com/advanpix/mpreal>.
25. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
26. Wolf A., Jack B., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1985. V. 16, N 3. P. 285–317.
27. Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006.
28. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2016.
29. Fousse L., Guillaume H., Lefèvre V., Péllissier P., Zimmermann P. MPFR: A multiple-precision binary floating-point library with correct rounding // ACM Trans. Math. Softw. (TOMS). 2007. V. 33, N 2. 13.
30. Ostrovskii V. Yu., Rybin V. G., Karimov A. I., Butusov D. N. Inducing multistability in discrete chaotic systems using numerical integration with variable symmetry // Chaos Solitons Fractals. 2022. V. 165. 112794.
31. Yan H., Jiang J., Hong L. The birth of a hidden attractor through boundary crisis // Int. J. Bifurcation Chaos. 2022. V. 32, N 2. 2230005.
32. Гринченко В. Т., Мацьпуря В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. М.: ЛЕНАНД, 2019.
33. Maxima computer algebra system <http://maxima.sourceforge.net/ru/>.
34. Kac M., Uhlenbeck G. E., Hibbs A. R., Pol B. V. D., Gillis J. Probability and related topics in physical sciences. New York: Intersci., 1959.
35. Anishchenko V. S., Boev Y. I., Semenova N. I., Strelkova G. I. Local and global approaches to the problem of Poincaré recurrences. Applications in nonlinear dynamics // Phys. Rep. 2015. V. 587. P. 1–39.
36. Gao J. B. Recurrence time statistics for chaotic systems and their applications // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 3, N 16. P. 3178–3181.
37. Пчелинцев А. Н. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2024616332. Программный комплекс для численного моделирования динамики системы Чуа на основе параллельных алгоритмов. 19.03.2024 г.

Поступила в редакцию 17 февраля 2025 г.

После доработки 10 июля 2025 г.

Принята к публикации 29 августа 2025 г.

Пчелинцев Александр Николаевич (ORCID 0000-0003-4136-1227)

Тамбовский государственный технический университет,

ул. Советская, 106, Тамбов 392000

pchelintsev.an@yandex.ru

ON A HIGHLY ACCURATE NUMERICAL METHOD
FOR STUDYING OF THE HIDDEN ATTRACTORS
IN THE PIECEWISE SMOOTH CHUA SYSTEM

A. N. Pchelintsev

Abstract: We consider an adaptation to the piecewise smooth Chua system of the previously developed high-precision numerical method for constructing approximations to unstable solutions of dynamic systems with quadratic nonlinearities on their attractors. Also, a modification of the Benettin–Wolf algorithm for calculating the characteristic Lyapunov exponents of the considered piecewise smooth system is obtained for the mode under consideration. A method based on the least squares method is developed, which makes possible to calculate the averaged estimate of the highest Lyapunov exponent based on the data on the behavior of the linearized dynamic system using a high-precision method over large time intervals. The following results are obtained for hidden attractors in the Chua system: 1) the fractal dimension of the hidden chaotic attractor based on the Poincaré return statistics, 2) the values of the characteristic Lyapunov exponents for a stable cycle and a chaotic attractor with the use of the developed modification of the Benettin–Wolf algorithm; its efficiency is increased due to parallel computing.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-113-134

Keywords: Chua system, Lyapunov characteristic exponents, high-precision numerical method, piecewise smooth system, Poincaré returns, parallel computing.

REFERENCES

1. Kuznetsov N. V., Kuznetsova O. A., Leonov G. A., Mokaev T. N., and Stankevich N. V., “Hidden attractors localization in Chua circuit via the describing function method,” IFAC-PapersOnLine, **50**, No. 1, 2651–2656 (2017).
2. Stankevich N. V., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., and Chua L. O., “Scenario of the birth of hidden attractors in the Chua circuit,” Int. J. Bifurcation Chaos, **27**, No. 12, 1730038 (2017).
3. Kuznetsov N., Kuznetsova O., Leonov G., and Vagaitsev V., “Analytical-numerical localization of hidden attractor in electrical Chua’s circuit,” Lect. Notes Electrical Eng., **174**, 149–158 (2013).
4. Krasnoselsky M. A. and Pokrovsky A. V., Systems with Hysteresis [in Russian], Nauka, Moscow (1983).
5. Piiroinen P. T. and Kuznetsov Y. A., “An event-driven method to simulate Filippov systems with accurate computing of sliding motions,” ACM Trans. Math. Softw., **34**, No. 3, 13 (2008).
6. Korobitsyn V. V., Frolova Yu. V., and Marenich V. B., “Algorithm for numerical solution of piecewise-stitched systems [in Russian],” Komput. Tekhnol., **13**, No. 2, 70–81 (2008).
7. Korobitsyn V. V. and Frolova Yu. V., “Algorithm for numerical solution of differential equations with discontinuous right-hand side [in Russian],” Mat. Struktury Model., No. 15, 46–54 (2005).
8. Korobitsyn V. V., Marenich V. B., and Frolova Yu. V., “Investigation of the behavior of explicit Runge–Kutta methods in solving systems of ordinary differential equations with discontinuous right-hand side [in Russian],” Mat. Struktury Model., No. 17, 19–25 (2007).

9. Korobitsyn V. V. and Frolova Yu. V., “Estimation of the error in calculating the intersection point of the continuation curve of the solution of the Cauchy problem with the discontinuity surface [in Russian],” *Mat. Struktury Model.*, No. 22, 5–14 (2011).
10. Korobitsyn V. V., “On the determination of the intersection point of the curve of the solution of the Cauchy problem with the discontinuity surface [in Russian],” *Komput. Tekhnol.*, **16**, No. 4, 50–63 (2011).
11. Belykh V. N., Barabash N. V., and Belykh I. V., “Sliding homoclinic bifurcations in a Lorenz-type system: Analytic proofs,” *Chaos*, **31**, 043117 (2021).
12. Korobitsyn V. V. and Frolova Yu. V., “Representation of the algorithm for numerical solution of a hybrid dynamic system with a finite set of discrete states in the form of a finite state machine [in Russian],” *Vestn. Omsk. Univ.*, No. 4, 221–227 (2013).
13. Lim C. W. and Wu B. S., “Accurate higher-order approximations to frequencies of nonlinear oscillators with fractional powers,” *J. Sound Vibration*, **281**, No. 3–5, 1157–1162 (2005).
14. Pchelintsev A. N., “Numerical and physical modeling of the dynamics of the Lorenz system,” *Numer. Anal. Appl.*, **7**, No. 2, 159–167 (2014).
15. Lozi R. and Pchelintsev A. N., “A new reliable numerical method for computing chaotic solutions of dynamical systems: the Chen attractor case,” *Int. J. Bifurcation Chaos*, **25**, No. 13, 1550187 (2015).
16. Lozi R., Pogonin V. A., and Pchelintsev A. N., “A new accurate numerical method of approximation of chaotic solutions of dynamical model equations with quadratic nonlinearities,” *Chaos Solitons Fractals*, **91**, 108–114 (2016).
17. Pchelintsev A. N., “An accurate numerical method and algorithm for constructing solutions of chaotic systems,” *J. Appl. Nonlin. Dyn.*, **9**, No. 2, 207–221 (2020).
18. Pchelintsev A. N., “On the Poisson stability to study a fourth-order dynamical system with quadratic nonlinearities,” *Mathematics*, **9**, No. 17, 2057 (2021).
19. Pchelintsev A. N., “On a high-precision method for studying attractors of dynamical systems and systems of explosive type,” *Mathematics*, **10**, No. 8, 1207 (2022).
20. Pchelintsev A. N., Polunovskiy A. A., and Yukhanova I. Yu., “The harmonic balance method for finding approximate periodic solutions of the Lorenz system [in Russian],” *Vestn. Ros. Univ. Mat.*, **24**, No. 126, 187–203 (2019).
21. Nemytskii V. V. and Stepanov V. V., *Qualitative Theory of Differential Equations*, Dover Publ., New York (1989).
22. Krasnoselsky M. A., *Shift Operator Along the Trajectories of Differential Equations* [in Russian], Nauka, Moscow (1966).
23. Pchelintsev A. N., “The high-precision computations for modeling nonlinear dynamic systems with attractors [in Russian],” in: *Computer Science: Problems, Methods, Technologies* (ed. D. N. Borisov), Proc. XXII Int. Sci. Pract. Algazinov Conf. (Voronezh, Feb. 10–12, 2022), pp. 437–443, Voronezh (2022).
24. The high-performance C++ interface for MPFR library. <https://github.com/advanpix/mpreal>.
25. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., and Kobelkov G. M., *Numerical Methods* [in Russian], BIL-NOM, Moscow (2011).
26. Wolf A., Jack B., Swift J. B., Swinney H. L., and Vastano J. A., “Determining Lyapunov exponents from a time series,” *Phys. D, Nonlin. Phenomena*, **16**, No. 3, 285–317 (1985).
27. Kuznetsov S. P., *Dynamic Chaos* [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2006).
28. Malinetsky G. G., Potapov A. B., and Podlazov A. V., *Nonlinear Dynamics: Approaches, Results, Hopes* [in Russian], LIBROCOM, Moscow (2016).
29. Fousse L., Guillaume H., Lefèvre V., Péllissier P., and Zimmermann P., “MPFR: A multiple-precision binary floating-point library with correct rounding,” *ACM Trans. Math. Software (TOMS)*, **33**, No. 2, 13 (2007).
30. Ostrovskii V. Yu., Rybin V. G., Karimov A. I., and Butusov D. N., “Inducing multistability in discrete chaotic systems using numerical integration with variable symmetry,” *Chaos Solitons Fractals*, **165**, 112794 (2022).
31. Yan H., Jiang J., and Hong L., “The birth of a hidden attractor through boundary crisis,” *Int. J. Bifurcation Chaos*, **32**, No. 2, 2230005 (2022).
32. Grinchenko V. T., Matsypura V. T., and Snarsky A. A., *Introduction to Nonlinear Dynamics: Chaos and Fractals* [in Russian], LENAND, Moscow (2019).

33. Maxima Computer Algebra System <http://maxima.sourceforge.net/ru/>.
34. Kac M., Uhlenbeck G. E., Hibbs A. R., Pol B. V. D., and Gillis J., Probability and Related Topics in Physical Sciences, Intersci., New York (1959).
35. Anishchenko V. S., Boev Y. I., Semenova N. I., and Strelkova G. I., “Local and global approaches to the problem of Poincaré recurrences. Applications in nonlinear dynamics,” Phys. Rep., **587**, 1–39 (2015).
36. Gao J. B., “Recurrence time statistics for chaotic systems and their applications,” Phys. Rev. Lett., **83**, No. 16, 3178–3181 (1999).
37. Pchelintsev A. N., Certificate of state registration of the computer program No. 2024616332, The software package for numerical modeling of the dynamics of the Chua system based on parallel algorithms, Reg. March 19, 2024.

Submitted February 17, 2025

Revised July 10, 2025

Accepted August 29, 2025

Alexander N. Pchelintsev (ORCID 0000-0003-4136-1227)

Tambov State Technical University,
106 Sovetskaya Street, Tambov 392000, Russia
pchelintsev.an@yandex.ru